ĐẠI HỌC QUẢNG NGÃI

BỘ ĐỀ

TOÁN RỜI RẠC

Dùng cho sinh viên khoa Công nghệ thông tin
và cho thí sinh luyện thi cao học ngành Khoa học máy tính

Biên soạn: BÙI TẤN NGỌC

- 10/2011 -

Bài toán đếm

Bài 1. ***Đếm số n gồm 2 chữ số, nếu:***

a. n chẵn

Gọi AB là số thỏa mãn yêu cầu

Vậy A có 9 cách chọn {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

(không chọn 0, vì chọn 0 thì số này có 1 chữ số)

B có 5 cách chọn {0, 2, 4, 6, 8}

Theo nguyên lý nhân, ta có : 9 x 5 = 45 số

b. n lẻ gồm 2 chữ số khác nhau

Gọi AB là số thỏa mãn yêu cầu

Vì là số lẻ, nên B có 5 cách chọn {1, 3, 5, 7, 9}

Sau khi ta chọn B, thì A có 8 cách chọn

Theo nguyên lý nhân, ta có : 5 x 8 = 40 số

c. n chẵn gồm 2 chữ số khác nhau

Gọi AB là số thỏa mãn yêu cầu

Khi B = {0}. A có 9 cách chọn {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Số cách chọn trong trường hợp này là : 9 cách

Khi B = {2, 4, 6, 8}. A có 8 cách chọn

Số cách chọn trong trường hợp này là : 4 x 8 = 32 cách

Theo nguyên lý cộng, ta có : 9 + 32 = 41 số

Cách khác:

Theo câu a ta có 45 số n chẵn. Ta có 4 chữ số chẵn gồm 2 chữ số giống nhau: 22, 44, 66, 88. => 45 – 4 = 41 số n chẵn gồm 2 chữ số khác nhau.

Bài 2. ***Cho tập các chữ số: {0, 1, 2, 3, 4, 5}***

a. Có bao nhiêu số có 3 chữ số mà các chữ số khác nhau được tạo thành từ tập đã cho.

Gọi **abc** là số có 3 chữ số mà các chữ số khác nhau ($a \neq b \neq c$).

Vậy : **a** có 5 cách chọn: {1, 2, 3, 4, 5}.

Sau khi chọn **a** xong, **b** có 5 cách chọn (bỏ đi 1 số đã chọn cho **a**)

Sau khi chọn **a**, **b** xong thì **c** có 4 cách chọn (bỏ đi 2 số đã chọn cho **a, b**)

Theo nguyên lý nhân, ta có : $5 \times 5 \times 4 = 100$ chữ số.

b. Có bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số mà các chữ số khác nhau được tạo thành từ tập đã cho.

Gọi **abc** là số chẵn có 3 chữ số mà các chữ số khác nhau ($a \neq b \neq c$).

Vậy : vì là số chẵn nên **c** có được chọn một trong ba chữ số: {0, 2, 4}.

+ Khi **c** = 0 (tức c có 1 cách chọn), ta chọn **a** và **b** như sau:

Sau khi chọn **c** =0, **a** có 5 cách chọn: {1, 2, 3, 4, 5}.

Sau khi chọn **a**, **c** xong thì **b** có 4 cách chọn.

Theo nguyên lý nhân, ta có : $1 \times 5 \times 4 = 20$ chữ số.

+ Khi **c** = 2 hoặc 4, tức là **c** có 2 cách chọn, ta chọn **a** và **b** như sau:

Sau khi chọn **c**, **a** có 4 cách chọn (bỏ đi 1 số đã chọn cho **c** và số 0)

Sau khi chọn **a**, **c** xong thì **b** có 4 cách chọn. (bỏ đi 2 số đã chọn cho **c** và **a**)

Theo nguyên lý nhân, ta có : $2 \times 4 \times 4 = 32$ chữ số.

Theo nguyên lý cộng, ta có: $20 + 32 = 52$ số

Bài 3. ***Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ MISSISSIPI, COMPUTER yêu cầu phải dùng tất cả các chữ?***

Từ MISSISSIPI có chứa : 1 từ M, 4 từ I, 4 từ S và 1 từ P

Số xâu khác nhau là :

$$\frac{10!}{1!.4!.4!.1!}$$

Xâu COMPUTER có 8 ký tự khác nhau, nên lập được 8! xâu.

Bài 4. ***Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8 không chứa 6 số 0 liền?***

Gọi A là số xâu nhị phân độ dài 8 có chứa 6 số 0 liền nhau.

B là số xâu nhị phân độ dài 8.

=> Số xâu cần đếm là : $N(\overline{A}) = N(B) - N(A)$

N(B) = 2.2.2.2.2.2.2.2 =2^8 = 256.

N(A) = 10

(00x, 11x, 1x1, x11, x10 ,1x0, 10x, x01,0x1, 01x : x=000000)

Vậy số xâu cần đếm là : 256 – 10 = 246

Bài 5. ***Đếm số byte***

a. Bất kỳ

Số byte là một dãy số có dạng: xxxxxxxx, x có 2 cách chọn 0 hoặc 1.

Theo nguyên lý nhân ta có : 2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^8 = 256

b. Có đúng hai bít 0.

Có nghĩa là chuỗi luôn có 2 bit 0 và các bit còn lại là 1.

Bài toán này tương đương với tính số cách sắp xếp các xâu từ: 00111111

Đây là hoán vị lặp của 8 phần tử với 2 loại: 2 số 0 và 6 số 1.

⇨ 8!/2!.6! = 7.8/2 = 28 xâu

c. Có ít nhất 2 bit 0

= Số xâu bất kỳ (a) – Số xâu không có bit 0 - Số xâu có 1 bit 0

Số xâu không có bit 0 = 1 trường hợp (11111111)

Số xâu có 1 bit 0 = 8!/1!7!= 8

⇨ 256 – 1 – 8 = 247

d. Bắt đầu 00 và kết thúc 00

Xâu này có dạng : 00xxxx00

Theo nguyên lí nhân, ta có : 1. 2.2.2.2 = 2^4 = 16

e. Bắt đầu 11 và kết thúc không phải 11

Gọi A là số xâu bắt đầu 11, có dạng 11xxxxxx

Theo nguyên lý nhân, ta có : A= 1.1.2.2.2.2.2.2 = 2^6 = 64

Gọi B là số xâu bắt đầu là 11 và kết thúc là 11, có dạng 11xxxx11

Theo nguyên lý nhân, ta có : B= 1.1.2.2.2.2.1.1 = 2^4 = 16

Gọi C là số xâu bắt đầu 11 và kết thúc không phải 11

=> C = A – B = 64 – 16 = 48

Bài 6.

a. Mật khẩu máy tính gồm 1 chữ cái và 3 hoặc 4 chữ số. Tính số mật khẩu tối đa có thể.

Dãy gồm 1 chữ cái và 3 chữ số có dạng: LNNN, NLNN, NNLN, NNNL

Trong đó L là chữ cái có 26 cách chọn và mỗi N là chữ số có 10 cách chọn.

Vì vậy theo nguyên lý nhân, ta có : 4 × 26 × 10 × 10 × 10 = 104000.

Tương tự dãy có 1 chữ cái và 4 chữ số : 5 × 26 × 10 × 10 × 10 × 10 = 1300000.

Theo nguyên lý cộng, ta có: 104000+ 1300000 = 1404000 (mật khẩu).

b. Như trên nhưng không lặp chữ số

Số mật khẩu gồm 1 chữ cái và 3 chữ số = 4 × 26 × 10 × 9 × 8 = 74880

Số mật khẩu gồm 1 chữ cái và 4 chữ số = 5 × 26 × 10 × 9 × 8 × 7 = 655200

Theo nguyên lý cộng, ta có: 74880 + 655200 = 730080 (mật khẩu).

Bài 7.

Đội bóng đá ACB có 20 cầu thủ. Cần chọn ra 11 cầu thủ, phân vào 11 vị trí trên sân để thi đấu chính thức. Hỏi có mấy cách chọn nếu :

a. Ai cũng có thể chơi ở bất cứ vị trí nào ?

Chọn ra 11 cầu thủ trong 20 cầu thủ đã cho, xếp vào 11 vị trí trên sân. Số cách chọn bằng chỉnh hợp không lặp chập 11 của 20 phần tử :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{20!}{(20-11)!} = \frac{20!}{9!} = 6704425728000 \text{ cách.}$$

b. Chỉ có một cầu thủ được chỉ định làm thủ môn, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được ?

Một cầu thủ đã chỉ định làm thủ môn, vậy ta cần chọn ra 10 cầu thủ trong 19 cầu thủ còn lại xếp vào 10 vị trí. Số cách chọn bằng chỉnh hợp không lặp chập 10 của 19 phần tử :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{19!}{(19-10)!} = \frac{19!}{9!} = 33522128640 0 \text{ cách.}$$

c. Có 3 cầu thủ chỉ có thể làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được ?

Có 3 cách chọn 1 cầu thủ để làm thủ môn từ 3 cầu thủ. Sau khi ta chọn thủ môn xong, kế đến chọn 10 cầu thủ trong 17 cầu thủ còn lại để xếp vào 10 vị trí, có:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{17!}{(17-10)!} = \frac{17!}{7!} = 70572902400 \text{ cách}$$

Theo nguyên lý nhân, ta có: $3 \times 70572902400 = 211718707200$ cách.

Bài 8. ***Có 8 người đi vào 1 thang máy của một tòa nhà 13 tầng. Hỏi có bao nhiêu cách để :***

a. Mỗi người đi vào 1 tầng khác nhau.

Số cách đi vào 8 tầng khác nhau của 8 người này là số cách chọn 8 trong số 13 tầng khác nhau (mỗi tầng được đánh số từ 1 đến 13). Đó là số chỉnh hợp không lặp chập 8 của 13 phần tử:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{13!}{(13-8)!} = \frac{13!}{5!} = 51891840$$

b. 8 người này, mỗi người đi vào 1 tầng bất kì nào đó.

Mỗi người có 13 cách lựa chọn từ tầng 1 đến 13. Mà có 8 người. Vậy số cách chọn là 8^{13}.

Bài 9. ***Có bao nhiêu xâu có độ dài 10 được tạo từ tập {a, b, c} thỏa mãn ít nhất 1 trong 2 điều kiện:***

- Chứa đúng 3 chữ a & chúng phải đứng cạnh nhau
- Chứa đúng 4 chữ b & chúng phải đứng cạnh nhau

Gọi A là số xâu có độ dài 10 có chứa đúng 3 chữ a đứng cạnh nhau.

B là số xâu có độ dài 10 có chứa đúng 4 chữ b đứng cạnh nhau.

Như vậy: $A \cup B$ là số xâu mà ta phải tìm.

Theo nguyên lý bù trừ, ta có: N(AUB) = N(A) + N(B) - N(A∩B)
Ta tính N(A) như sau:

Xét trường hợp aaa ở đầu: aaa$X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$.

- X_i (i=1..7) chỉ có 2 giá trị là b, c, vậy số trường hợp đối với 7 ký tự này giống như xâu nhị phân có độ dài 7, hay bằng 2^7 trường hợp.
- Xâu aaa, có thể được xếp vào 8 vị trí (aaa$X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$, X_1aaa$X_2X_3X_4X_5X_6X_7$, X_1X_2aaa$X_3X_4X_5X_6X_7$, $X_1X_2X_3$aaa$X_4X_5X_6X_7$, $X_1X_2X_3X_4$aaa$X_5X_6X_7$ $X_1X_2X_3X_4X_5$aaaX_6X_7, $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$aaaX_7, $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$aaa). Vì vậy: N(A) = 8.2^7

+ Tương tự, số lượng xâu có 4 chữ b đứng cạnh nhau, N(B) = 7.2^6

+ N(A∩B) được tính bằng cách gộp aaa = X, bbbb = Y, còn lại là 3 chữ c.

Ta tính số xâu từ dãy: XcccY có: 5!/1!3!1! = 4.5 = 20 trường hợp.

Vậy số xâu cần tính là: $8.2^7 + 7.2^6 - 20 = 2476$.

Bài 10. *(Đề thi cao học ĐH CNTT TP HCM-2010)*

Xét biển số xe: $A_1A_2A_3N_1N_2N_3N_4N_5N_6$

A_i(i=1..3): A->Z; N_j(j=1..6): 0->9

a. Hỏi có bao nhiêu biển số khác nhau?

b. Hỏi có bao nhiêu biển số thỏa điều kiện: ba mẫu tự khác nhau đôi một và trong biển số có đúng 1 chữ số 3 và 1 chữ số 5?

c. Hỏi có bao nhiêu biển số thỏa điều kiện: trong biển số có ít nhất 1 chữ số 3 và 1 chữ số 5?

a. A_i (i=1..3) có 26 cách chọn từ 26 chữ cái tiếng Anh từ A .. Z

   N_j(j=1..6) có 10 cách chọn từ 10 chữ số từ 0 .. 9

   Theo nguyên lý nhân ta có: 26.26.26.10.10.10.10.10.10 = $26^3.10^6$ biển số.

b. Số cách chọn 3 mẫu tự $A_1A_2A_3$ khác nhau: A1 có 26, A2 có 25, A3 có 24 cách.

   Số cách chọn 4 chữ số $N_1N_2N_3N_4$ không có số 3 và số 5: 8.8.8.8 = 8^4 cách.

   Số cách đặt số 3 vào dãy 4 chữ số $N_1N_2N_3N_4$ là 5 cách, đó là: $3N_1N_2N_3N_4$, $N_13N_2N_3N_4$, $N_1N_23N_3N_4$, $N_1N_2N_33N_4$, $N_1N_2N_3N_43$.

Tương tự số cách đặt số 5 vào 5 dãy có 5 chữ số đã liệt kê ở trên là : 5.6=30

Theo nguyên lý nhân, ta có : $24.\ 8^4.30$ cách.

c. Gọi A là số biển số không có chứa chữ số 3 và chữ số 5.

$N_A = 26^3.8^6$ biển số

Gọi B là số là số biển số có chứa chữ số 3 và không có chứa chữ số 5.

$N_B = 26^3.9^6$ biển số

Gọi C là số là số biển số có không chứa chữ số 3 và có chứa chữ số 5.

$N_C = 26^3.9^6$ biển số

Gọi D số biển số có ít nhất 1 chữ số 3 và 1 chữ số 5

$N_D = N - N_A - N_B - N_C$ Theo câu a: $N = 26^3.10^6$

$= 26^3.10^6 - 26^3.9^6 - 26^3.9^6 - 26^3.8^6 = 26^3(10^6 - 2.9^6 - 8^6)$.

Bài 11.

a. Có bao nhiêu số có n chữ số mà có m chữ số đầu và m chữ số cuối tương ứng giống nhau. (n>2m>2, n,m∈N).

Gọi A dãy số cần tìm, A có dạng:

$$\overbrace{xx\ldots xbb\ldots b\underbrace{xx\ldots x}_{m}}^{n}$$

Số cách chọn m chữ số đầu tiên và m chữ số cuối tương ứng giống nhau bằng chỉnh hợp lặp chập m của 10 phần tử (0..9): 9.10^{m-1} (Chữ số đầu có 9 cách chọn, vì bỏ số 0 đứng đầu).

Số cách chọn dãy số ở giữa:

Dãy này gồm có n-2m chữ số. Số cách chọn là: 10^{n-2m}.

Theo nguyên lý nhân, ta có: $9.\ 10^{m-1}.10^{n-2m}$ chữ số.

b. Ứng dụng tính số chữ số có 10 chữ số mà 3 chữ số đầu và 3 chữ số cuối tương ứng giống nhau.

Số chữ số thỏa mãn đề bài bằng: $9.10^2.10^{10-6} = 9.10^2.10^4 = 9000000$.

Bài 12. *(Đề thi cao học Đà Nẵng - 8/2008)*

a. Trong một lớp học có 30 người. Cho biết có bao nhiêu cách cử một ban đại diện gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

Có 30 cách chọn 1 lớp trưởng.

Sau khi chọn 1 lớp trưởng xong, có 29 cách chọn 1 lớp phó.
Sau khi chọn 1 lớp trưởng, 1 lớp phó xong, có 28 cách chọn 1thủ quĩ.
Theo nguyên lý nhân, ta có : 30.29.28 = 24360 cách chọn.

Cách khác:
Số cách chọn chính bằng số chỉnh hợp không lặp chập 3 của 30 phần tử :

A(30,3) = 30!/(30-3)!= 24360.

b. Cho biết có thể nhận bao nhiêu xâu ký tự khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS.

Từ SUCCESS có: 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E.

Vậy có : $\frac{7!}{3!.1!.2!.1!} = \frac{4.5.6.7}{2} = 2.5.6.7 = 420$ xâu khác nhau.

Bài 13. *(Đề thi cao học Đà Nẵng - 2/2009)*

a. Giả sử chúng ta có 5 viên bi giống nhau và 3 chiếc túi khác màu là xanh, vàng và đỏ. Cho biết có bao nhiêu cách bỏ bi vào các túi? Ví dụ: cách 1 -> túi xanh 5 viên, túi vàng và túi đỏ không có bi; cách 2 -> túi xanh 3 viên, túi vàng và túi đỏ mỗi túi 1 viên, …

Số cách bỏ bi tương ứng chính bằng số tổ hợp lặp chập 5 từ tập có 3 phần tử là:

$$C_{n+k-1}^{n-1} = C_{3+5-1}^{3-1} = C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!.2!} = \frac{6.7}{2} = 21$$

b. Giả sử chúng ta có 5 viên bi (2 bi sắt, 2 bi chai và 1 bi đất) và 3 chiếc túi màu xanh, vàng và đỏ. Cho biết có bao nhiêu cách bỏ bi vào các túi? Ví dụ: Cách 1⇒ túi xanh chứa 2 bi sắt, túi vàng 2 bi chai và túi đỏ 1 bi đất; cách 2 -> túi xanh 1 bi sắt, túi vàng 2 bi chai + 1 bi sắt và túi đỏ 1 bi đất, …

Ta bỏ lần lượt từng loại vào 3 cái túi:

+ Bỏ 2 viên bi sắt vào 3 cái túi, có $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{3+2-1}^{3-1} = C_4^2 = \frac{4!}{(2)!.2!} = \frac{3.4}{2} = 6$ cách bỏ

+ Bỏ 2 viên bi chai vào 3 cái túi, có $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{3+2-1}^{3-1} = C_4^2 = \frac{4!}{(2)!.2!} = \frac{3.4}{2} = 6$ cách bỏ bi

+ Bỏ 1 viên bi chai vào 3 cái túi, có $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{3+1-1}^{3-1} = C_3^2 = \frac{3!}{1!.2!} = 3$ cách bỏ bi

Theo nguyên lý nhân, ta có: 6.6.3 = 108 cách bỏ bi.

c. Giả sử chúng ta có 5 viên bi (2 bi sắt, 2 bi chai và 1 bi đất. Cho biết có bao nhiêu cách sắp chúng thành hàng? Ví dụ: sắt sắt chai chai đất, sắt chai sắt chai đất,…

Cách sắp các viên bi thành hàng chính bằng hoán vị lặp của 5 phần tử, trong đó 2 bi sắt, 2 bi chai và 1 bi đất, vậy có: $\frac{5!}{2!.2!.1!} = \frac{3.4.5}{2} = 30$ cách sắp bi.

Bài 14. *(Đề thi cao học ĐH CNTT TPHCM -5/2001)*

a. Tìm số các chuỗi 8 bits thỏa mãn điều kiện: bit đầu tiên là 1 hay 2 bit cuối là 0

Gọi A là số chuỗi 8bits có bit đầu tiên là 1

B là số chuỗi 8bits có 2 bit cuối là 0.

Theo nguyên lý bù trừ, ta có $N(A\cup B) = N(A) + N(B) - N(A\cap B)$

Tính N(A): Gọi $S=s_1s_2s_3s_4s_5s_6s_7s_8$ là chuỗi 8bits có bit đầu tiên là 1. Vậy s_1 có 1 trường hợp, s_i(i=2..8) có 2 trường hợp 0 và 1. Theo nguyên lý nhân, ta có:

$$N(A) = 1.2.2.2.2.2.2.2 = 2^7$$

Tương tự: $N(B) = 2^6$.

$N(A\cap B) = 2^5$

Vậy: $N(A\cup B) = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$

b. Mỗi người sử dụng một hệ thống máy tính của một công ty X phải sử dụng một password dài từ 6 đến 8 ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ cái hoặc là một chữ số. Mỗi password phải có ít nhất một chữ số. Hỏi có thể lập được bao nhiêu password khác nhau?

Xét 2 trường hợp:

+ Mật khẩu phân biệt chữ hoa, chữ thường, có 52 chữ (a..z, A..Z) và 10 chữ số (0..9). Như vậy, có 62 ký tự. Số mật khẩu có độ dài n được thành lập từ 62 ký tự đó bằng: 62^n.

Số mật khẩu có độ dài n không có chữ số bằng: 52^n.

Số mật khẩu có độ dài n có ít nhất 1 chữ số bằng: $62^n - 52^n$

Mật khẩu có độ dài từ 6 đến 8 ký tự, tức là: Mật khẩu có 3 độ dài: 6, 7 và 8 ký tự

Với mật khẩu có độ dài bằng 6, có: $62^6 - 52^6$ trường hợp.

Với mật khẩu có độ dài bằng 7, có: $62^7 - 52^7$ trường hợp.

Với mật khẩu có độ dài bằng 8, có: $62^8 - 52^8$ trường hợp.

Theo nguyên lý cộng, ta có số mật khẩu lập được là: $(62^6 - 52^6) + (62^7 - 52^7) + (62^8 - 52^8)$

+ Mật khẩu không phân biệt chữ hoa, chữ thường, có 26 chữ (a..z) và 10 chữ số (0..9). Như vậy, có 36. Tương tự như lý luận ở trên, ta có: $(36^6 – 26^6) + (36^7 – 26^7) + (36^8 – 26^8)$

Bài 15. *(Đề thi cao học ĐH KHTN-1999)*

Xét 3 chuỗi ký tự trên tập mẫu tự {a, b, c} (với a < b < c) : s1 = ac, s2 = aacb, s3 = aba.

a. Hãy sắp xếp chúng theo thứ tự tăng đối với thứ tự từ điển.

s2 < s3 < s1 (vì 3 ký tự của 3 chuổi bằng nhau, nhưng ký tự thứ hai của s1 là c, s2 là a và s3 là b. Theo đề a < b < c, nên s2 < s3 < s1)

b. Cho biết giữa s1 và s3 có bao nhiêu chuỗi ký tự có chiều dài 6.

s3 = aba < ab * * * * < s1 = ac

Mỗi * có 3 cách chọn. Theo nguyên lý nhân, ta có: 3.3.3.3 = 81 chuỗi

Bài 16. ***Cho trước một đa giác lồi P có 10 đỉnh lần lượt là A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Giả sử rằng trong đa giác không có 3 đường chéo nào cắt nhau tại một điểm. Hãy cho biết đa giác có tổng bao nhiêu đường chéo.***

Vì đa giác lồi P có 10 đỉnh, nên tổng số các đường nối 2 đỉnh bất kỳ của P chính bằng tổ hợp chập 2 (đỉnh) của 10 (đỉnh).

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!.2!} = \frac{9.10}{2} = 45 \text{ cạnh.}$$

Theo đề bài đa giác lồi P có 10 cạnh, vậy số đường chéo của đa giác P là:

45 -10 =35

Bài 17. ***Tìm số nghiệm nguyên không âm của:***

a. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ***với*** $x_1 \geq 0$ ***;*** $x_2 \geq 0$***;*** $x_3 \geq 0$***;*** $x_4 \geq 0$

Ta nhận thấy mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 20 phần tử từ một tập có 4 loại, sao cho có x1 phần tử loại 1, x2 phần tử loại 2, x3 phần tử loại 3, x4 phần tử loại 4 được chọn. Vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 20 từ tập có 4 phần tử là:

$$C_{n+k-1}^{n-1} = C_{4+20-1}^{4-1} = C_{23}^{3} = \frac{23!}{(23-3)!.3!} = \frac{23!}{20!.3!} = \frac{21.22.23}{2.3} = 7.11.23 = 1771$$

b. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ***với*** $x_1 \geq 6$ ***;*** $x_2 \geq 3$***;*** $x_3 \geq 9$***;*** $x_4 \geq -2$

$x_1 > 6 \Leftrightarrow x_1 - 6 \geq 0$ Đặt : $a = x_1 - 6 \Rightarrow x_1 = a + 6$

$x_2 > 3 \Leftrightarrow x_2 - 3 \geq 0$ $b = x_2 - 3 \Rightarrow x_2 = b + 3$

$x_3 > 9 \Leftrightarrow x_3 - 9 \geq 0$ $c = x_3 - 9 \Rightarrow x_3 = c + 9$

$x_4 > -2 \Leftrightarrow x_4 + 2 \geq 0$ $d = x_4 + 2 \Rightarrow x_4 = d - 2$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \Leftrightarrow a + 6 + b + 3 + c + 9 + d - 3 = 20$

$\Leftrightarrow a + b + c + d = 5$ với $a \geq 0$; $b \geq 0$; $c \geq 0$; $d \geq 0$

Vậy có : $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{4+5-1}^{4-1} = C_{8}^{3} = \frac{8!}{(8-3)!.3!} = \frac{8!}{5!.3!} = \frac{6.7.8}{2.3} = 56$ nghiệm

c. Bất phương trình $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ ***với*** $x_1 \geq 0$***;*** $x_2 \geq 0$***;*** $x_3 \geq 0$***.***

Thêm ẩn phụ x4, với điều kiện x4 ≥ 0.

Bất phương trình đã cho tương đương với: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ với $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$.

$$C_{n+k-1}^{n-1} = C_{4+11-1}^{4-1} = C_{14}^{3} = \frac{14!}{11!.3!} = \frac{12.13.14}{2.3} = 364.$$

d. Phương trình $x + y + z = 10$ ***với*** $0 \leq x \leq 2$***,*** $0 \leq y \leq 4$***,*** $0 \leq z \leq 6$***.***

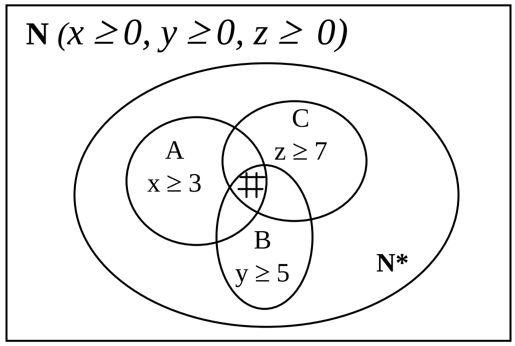
Gọi U là tập tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình x + y + z = 10, ta có:

$$N = |U| = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{3+10-1}^{3-1} = C_{12}^{2} = \frac{12!}{10!.2!} = \frac{11.12}{2} = 66.$$

Gọi: A là tập nghiệm với x ≥ 3, y ≥ 0, z ≥ 0.

B là tập nghiệm với $x \ge 0$, $y \ge 5$, $z \ge 0$.

C là tập nghiệm với $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 7$.



Theo nguyên lý bù trừ, số nghiệm nguyên của phương trình là:

$N^* = N - |A \cup B \cup C|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

A là tập nghiệm với $x \ge 3$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, đặt $x' = x-3$, $y' = y$, $z' = z$, phương trình đã cho tương đương với $x' + y' + z' = 7$ với $x' \ge 0$, $y' \ge 0$, $z' \ge 0$.

=> $|A| = C(9,2) = 9!/7!.2! = 8.9/2 = 36$.

Tương tự : $|B| = C(7,2) = 7!/5!.2! = 6.7/2 = 21$.

$|C| = C(5,2) = 5!/3!.2! = 4.5/2 = 10$.

$|A \cap B|$: $x \ge 3$, $y \ge 5$, $z \ge 0$: => $x' + y' + z' = 2$ với $x' \ge 0$, $y' \ge 0$, $z' \ge 0$.

$|A \cap B| = C(4,2) = 4!/2!2! = 3.4/2 = 6$.

$|A \cap C|$: $x \ge 3$, $y \ge 0$, $z \ge 7$: => $x' + y' + z' = 0$ với $x' \ge 0$, $y' \ge 0$, $z' \ge 0$.

$|A \cap C| = C(2,2) = 2!/0!2! = 1$.

$|B \cap C|$: $x \ge 0$, $y \ge 5$, $z \ge 7$: => $x' + y' + z' = -2$ với $x' \ge 0$, $y' \ge 0$, $z' \ge 0$.

=> $|B \cap C| = 0$.

$|A \cap B \cap C|$: $x \ge 3$, $y \ge 5$, $z \ge 7$: => $x' + y' + z' = -5$ với $x' \ge 0$, $y' \ge 0$, $z' \ge 0$.

=> $|A \cap B \cap C| = 0$.

Vậy : $|A \cup B \cup C| = 28 + 21 + 10 + 6 + 1 + 0 - 0 = 60$

=> $N^* = 66 - 60 = 8$.

Đó là các nghiệm: (0,4,6); (1,3,6); (1,4,5); (2,2,6); (2,3,5); (2,4,4);

e. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ***(1) thỏa mãn x1 ≤ 3; x2 ≥ 2; x3 > 4***

Vì các biến nhận giá trị nguyên. Nên điều kiện x1 ≤ 3; x2 ≥ 2; x3 > 4 được viết lại là: x1 ≤ 3; x2 ≥ 2; x3 ≥ 5 (*). Xét các điều kiện sau:

x2 ≥ 2; x3 ≥ 5 (**)

x1 ≥ 4; x2 ≥ 2; x3 ≥ 5 (***)

Ta gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình thỏa mãn (*), (**), (***).

Ta có: p = q – r

Trước hết, ta tìm q như sau:

Đặt: x_1'= x_1, x_2' = x_2 – 2, x_3' = x_3 – 5, x_4' = x_4.

Phương trình (1) trở thành: x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 13 (2)

Số nghiệm nguyên không âm của (2) chính bằng số nghiệm của (1) thỏa mãn (**).

Mà số nghiệm của (2) là $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{4+13-1}^{4-1} = C_{16}^{3} = \frac{16!}{13!.3!} = \frac{14.15.16}{2.3} = 7.5.16 = 560.$

Ta tìm r như sau:

Đặt: x_1'= x_1 - 4, x_2' = x_2 – 2, x_3' = x_3 – 5, x_4' = x_4.

Phương trình (1) trở thành: x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 9 (3)

Số nghiệm nguyên không âm của (3) chính bằng số nghiệm của (1) thỏa mãn (***). Mà số nghiệm của (3) là: $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{4+9-1}^{4-1} = C_{12}^{3} = \frac{12!}{9!.3!} = \frac{10.11.12}{2.3} = 5.11.4 = 220$

=> P = q – r = 560 – 220 = 340.

Vậy số nghiệm nguyên nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (*) là 340.

Bài 18. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng – 10/2010).*

Cho phương trình : x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 21 (1)

a. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1).

Ta thấy rằng mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 21 phần tử từ tập có 5 loại, sao cho có x1 phần tử loại 1, x2 phần tử loại 2, x3 phần tử loại 3, x4 phần tử loại 4, x5 phần tử loại 5 được chọn. Vậy số nghiệm nguyên dương không âm của phương trình chính bằng tổ hợp lặp chập 21 phần tử từ tập có 5 phần tử:

$$C_{n+k-1}^{n-1} = C_{5+21-1}^{5-1} = C_{25}^{4} = \frac{25!}{(25-4)!.4!} = \frac{25!}{21!.4!} = \frac{22.23.24.25}{2.3.4} = 12650$$

b. Phương trình (1) có bao nhiêu nghiệm dương không âm thỏa mãn x1>2, x5<4.

Vì là nghiệm nguyên dương không âm, nên điều kiện x1>2, x5<4 được viết lại như sau: x1 ≥ 3, x5 ≤ 3 (I). Ta xét các điều kiện sau:

+ x1 ≥ 3 (II)

+ x1 ≥ 3, x5 ≥ 4 (III)

Gọi p, q và r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa mãn các điều kiện (I), (II), (III). Vậy, ta có : p = q – r.

Tính q: Tìm số nghiệm nguyên dương không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (I): x1 ≥ 3, x2 ≥ 0, x3 ≥ 0, x4 ≥ 0, x5 ≥ 0.

x1 ≥ 3 ⇔ x1 – 3 ≥ 0 đặt a = x1 - 3 ⇒ x1 = a + 3

và đặt b = x2, c = x3, d = x4, e = x5. Phương trình (1) được viết lại như sau:

a + 3 + b + c + d + e = 21

⇔ a + b + c + d + e = 18 (2) với a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0, d ≥ 0, e ≥ 0.

Số nghiệm nguyên dương không âm của (2) chính bằng số nghiệm nguyên dương của (1) thỏa mãn điều kiện x1 ≥ 3.

$$\Rightarrow \text{ q} = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{5+18-1}^{5-1} = C_{22}^{4} = \frac{22!}{(22-4)!.4!} = \frac{22!}{18!.4!} = \frac{19.20.21.22}{2.3.4} = 7315$$

Tương tự ta đi tính r: Tìm số nghiệm nguyên dương không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (III): x1 ≥ 3, x2 ≥ 0, x3 ≥ 0, x4 ≥ 0, x5 ≥ 4.

x1 ≥ 3 ⇔ x1 – 3 ≥ 0 đặt a = x1 - 3 ⇒ x1 = a + 3

x5 ≥ 4 ⇔ x5 – 4 ≥ 0 e = x5 – 4 ⇒ x5 = e + 4

và đặt b = x2, c = x3, d = x4. Phương trình (1) được viết lại như sau:

a + 3 + b + c + d + e + 4 = 21

⇔ a + b + c + d + e = 14 (3) với a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0, d ≥ 0, e ≥ 0.

Số nghiệm nguyên dương không âm của (3) chính bằng số nghiệm nguyên dương của (1) thỏa mãn điều kiện x1 ≥ 3, x5 ≥ 4.

$$\Rightarrow \ r = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{5+14-1}^{5-1} = C_{18}^{4} = \frac{18!}{(18-4)!.4!} = \frac{18!}{14!.4!} = \frac{15.16.17.18}{2.3.4} = 3060$$

Vậy: p = q – r = 7315 – 3060 = 4255.

Bài 19. *(Đề thi cao học Đà Nẵng – 9/2011)*

Người ta chia 10 viên kẹo (hoàn toàn giống nhau) cho 3 em bé.

a. Có bao nhiêu cách chia kẹo

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số kẹo được chia cho mỗi em

Ta có : $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ với $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Ta thấy rằng mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 10 phần tử từ tập có 3 loại, sao cho có x1 phần tử loại 1, x2 phần tử loại 2, x3 phần tử loại 3 được chọn. Vậy số nghiệm nguyên dương không âm của phương trình chính bằng tổ hợp lặp chập 10 phần tử từ tập có 3 phần tử:

$$C_{N+K-1}^{N-1} = C_{3+10-1}^{3-1} = C_{12}^{2} = \frac{12!}{(12-2)!.2!} = \frac{12!}{10!.2!} = \frac{11.12}{2} = 66$$

Vậy có 66 cách chia 10 viên kẹo cho 3 em bé.

b. Có bao nhiêu cách chia kẹo sao cho em nào cũng có ít nhất 1 viên

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số kẹo được chia cho mỗi em. Vì mỗi em phải có ít nhất 1 viên nên: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ (1) với $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$.

Đặt: $x_1' = x_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_1' + 1$ (a)

$x_2' = x_2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_2 = x_2' + 1$ (b)

$x_3' = x_3 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_3 = x_3' + 1$ (c)

Thay (a), (b) và (c) vào phương trình (1), ta được :

$x_1' + x_2' + x_3' = 7$ (2) với $x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0$

Số nghiệm nguyên dương của phương trình (2) cũng chính bằng số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) thỏa mãn với điều kiện mà đề bài đưa ra và bằng:

$$C_{N+K-1}^{N-1} = C_{3+7-1}^{3-1} = C_{9}^{2} = \frac{9!}{(9-2)!.2!} = \frac{9!}{7!.2!} = \frac{8.9}{2} = 36$$

Vậy có 36 cách chia 10 viên kẹo cho 3 em bé mà mỗi em bé có ít nhất 1 viên.

Bài 20. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng – 8/2009).*

Cho bảng chữ cái Σ gồm n ký tự phân biệt, trong đó có ký tự a. Hãy cho biết:
a. Có bao nhiêu chuỗi ký tự được xây dựng từ Σ có độ dài p.

Số chuỗi có độ dài **p** được xây dựng từ bảng chữ cái Σ gồm ***n*** ký tự phân biệt, chính bằng chỉnh hợp lặp chập ***p*** của ***n*** phần tử: n^p.

b. Có bao nhiêu chuỗi ký tự được xây dựng từ Σ có độ dài p chứa ít một ký tự a.

Số chuỗi có độ dài p không chứa ký tự a là: $(n-1)^p$.

Số chuỗi có độ dài p chứa ít nhất 1 ký tự a bằng số chuỗi có độ dài **p** trừ đi số chuỗi có độ dài **p** không chứa ký tự ***a***: n^p - $(n-1)^p$.

c. Có bao nhiêu chuỗi được xây dựng từ Σ có độ dài p chứa chỉ một ký tự a.

Gọi B là số chuỗi có độ dài p-1 không có ký tự a là: B = $(n-1)^{p-1}$.

Để có chuỗi có đúng 1 ký tự ***a***, ta đem chèn ký tự ***a*** vào số chuỗi **B**. Ứng với 1 chuỗi trong **B** có ***p*** cách chèn ký tự ***a*** vào.

Vậy số chuỗi được xây dựng từ Σ có độ dài p chứa chỉ một ký tự a là: $p \times (n-1)^{p-1}$

d. Có bao nhiêu chuỗi ký tự được xây dựng từ Σ có độ dài p có đúng q ký tự a.

Số tập hợp gồm q vị trí trong số p vị trí của chuỗi có độ dài p là:

$$C_p^q = \frac{p!}{(p-q)!.q!}$$

Trong chuỗi p, có q ký tự a, số ký tự ký còn lại không có chứa a là p-q, và bằng $(n-1)^{p-q}$

Vậy số chuỗi được xây dựng từ Σ có độ dài p chứa q ký tự a là: $\frac{p!}{(p-q)!.q!} \times (n-1)^{p-q}$

Bài 21. ***Đếm số cách đặt 20 cuốn sách vào 4 ngăn tủ, mỗi ngăn đựng 5 cuốn, nếu:***

a. Mỗi ngăn được đánh số phân biệt

b. Các ngăn như nhau

a. Chọn 5 cuốn sách bỏ vào ngăn 1, có **:** $C_{20}^5 = \frac{20!}{(15)!.5!}$ cách

Sau khi chọn 5 cuốn bỏ vào ngăn 2, số sách còn lại là 15. Chọn tiếp 5 cuốn bỏ vào ngăn 2, có: $C_{15}^5 = \frac{15!}{(10)!.5!}$ cách.

Tương tự, chọn 5 cuốn trong số sách còn bỏ vào ngăn 3, có: $C_{10}^{5} = \frac{10!}{(5)!.5!}$ cách

Bỏ 5 cuốn cuối cùng vào ngăn 4, có : $C_{5}^{5} = \frac{5!}{(0)!.5!} = 1$ cách.

Theo nguyên lý nhân, ta có: $\frac{20!}{(15)!.5!} \times \frac{15!}{(10)!.5!} \times \frac{10!}{(5)!.5!} \times 1 = \frac{20!}{(5!)^4}$ cách bỏ sách.

b. Vì 4 ngăn như nhau nên số cách bỏ sách vào 4 ngăn là: $\frac{20!}{(5!)^4 \; 4!}$

Bài 22. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng – 3/2010).*

Cho bảng chữ cái, gồm bốn chữ số {1, 2, 3, 4} và bảy ký tự {a, b, c, d, e, f, g}.

a. Có bao nhiêu từ có độ dài n được xây dựng từ bảng chữ cái trên.

Ta có bảng chữ cái là : 11.

Số xâu có độ dài n được xây dựng trên bảng có 11 chữ, chính bằng chỉnh hợp lặp chập n của 11 phần tử. Vậy : 11^n.

b. Có bao nhiêu từ có độ dài n mà trong từ đó không có hai ký tự đứng liền kề.

Gọi M là từ có độ dài n mà trong đó có hai ký tự kề nhau.

Gọi A là từ có độ dài n-2 được xây dựng từ bảng 11 chữ cái, số từ A là: 11^{n-2}

M được lập bằng cách: chọn 2 ký tự bất kỳ, đem chèn vào từng vị trí của A.

Số cách chọn 2 ký tự từ 7 chữ cái: 7^2, được chèn vào n-1 vị trí trong từ A.

- ⇨ Số từ có độ dài n mà trong đó có hai ký tự kề nhau: $7^2(n-1).\ 11^{n-2}$

Vậy số từ có độ dài n mà trong đó không có hai ký tự kề nhau là:

$$11^n – (7^2(n-1).\ 11^{n-2})$$

c. Có bao nhiêu từ có độ dài n được xây dựng từ bảng chữ cái trên mà trong từ đó luôn xuất hiện ít nhất 1 chữ số và một ký tự (n>1).

Gọi X là số từ có độ dài n chỉ có chữ số: X= 4^n

Y là số từ có độ dài n chỉ có ký tự: Y= 7^n

Vậy số từ thỏa mãn đề bài là: $11^n – 4^n – 7^n$

Bài 23. *(Đề thi cao học Đà Nẵng – 10/2010)*

Cho X={0..15}. Chứng tỏ rằng nếu S là một tập con gồm 9 phần tử của X thì có ít nhất 2 phần tử của S có tổng bằng 15.

Phân hoạch X thành 8 tập con, mỗi tập con đều có tổng bằng 15, như sau:

$$\{0,15\}, \{1,14\}, \{2,13\}, \{3,12\}, \{4,11\}, \{5,10\}, \{6,9\}, \{7,8\}$$

Phân 9 phần tử của S vào 8 tập con trên. Theo nguyên lý Dirichlet, có 2 phần tử của S thuộc một tập nào đó, mà tổng 2 phần tử này sẽ bằng 15.

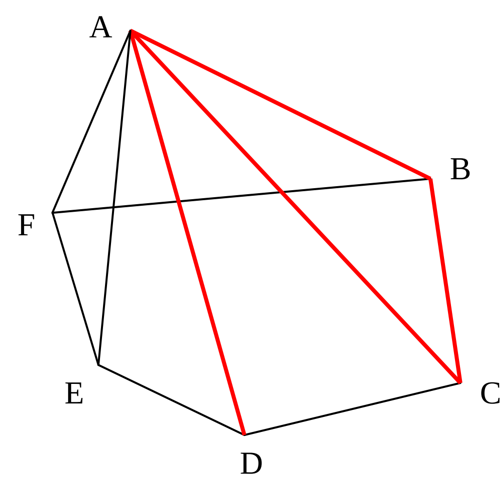
Bài 24. *(Đề thi cao học Đà Nẵng – 3/2011)*

Trong mặt phẳng cho 6 điểm phân biệt nối nhau từng đôi một bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc đỏ. Chứng tỏ rằng có 3 điểm nối nhau bởi các đoạn thẳng cùng màu.

Gọi A, B, C, D, E, F là 6 điểm phân biệt nằm trong một mặt phẳng.

Giả sử ta chọn điểm A, nối điểm A với 5 điểm còn lại B, C, D, E, F bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc đỏ.

Giả sử ta chọn điểm A, nối điểm A với 5 điểm còn lại B, C, D, E, F bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc đỏ.
Theo nguyên lý Dirichlet phải có 3 đoạn thẳng cùng màu xanh hoặc đỏ. Giả sử là 3 đoạn thẳng AB, AC và AD có màu đỏ (như hình vẽ).
+ Nếu trong tam giác BCD có cạnh màu đỏ, giả sử là cạnh BC, thì tam giác ABC là tam giác có các cạnh màu đỏ (hay 3 điểm nối nhau cùng màu).



+ Ngược lại, tam giác BCD không có cạnh màu đỏ, thì tam giác này phải màu xanh.

Vậy luôn luôn tồn tại 3 điểm nối với nhau từng đôi 1 bởi các đoạn thẳng cùng màu

Bài 25. ***Một võ sĩ quyền anh thi đấu giành chức vô địch trong 75 giờ. Mỗi giờ đấu ít nhất một trận, nhưng toàn bộ không quá 125 trận. Chứng tỏ rằng có những giờ liên tiếp đã đấu 24 trận.***

Gọi a_i là số trận đấu cho đến hết giờ thứ i (i=1..75) của võ sĩ quyền anh.

Ta có : $1 \le a_1 < a_2 \ldots < a_{75} \le 125.$ (1)

$\Leftrightarrow 25 \le a_1 + 24 < a_2 + 24 \ldots < a_{75} + 24 \le 149.$ (2)

Như vậy ta có 150 số trong 2 dãy (1) và (2) nhận giá trị trong {1..149}.
Theo nguyên lý Dirichlet phải có 2 hai số bằng nhau. Vì 2 dãy trên là dãy tăng, nên hai số bằng nhau thuộc 2 dãy khác nhau. Hay, ta có: $a_i+24 = a_j \Leftrightarrow a_j - a_i = 24$. Như vậy, từ giờ i đến hết giờ j võ sĩ đã thi đấu 24 trận.

Bài 26. *(Đề thi cao học Đà Nẵng – 8/2009)*

a. ***Một mạng máy tính có n (n>1) máy tính. Mỗi máy tính được nối trực tiếp hoặc không nối với các máy khác. CMR có ít nhất hai máy tính mà số các máy tính khác nối với chúng là bằng nhau.***

Gọi q1, q2, q3, … qn là số máy tính kết nối với máy 1, 2, 3 .. n.

Như vậy ta có: $0 \le qi \le n\text{-}1$ i=1..n

Tuy nhiên, không thể xảy ra đồng thời: có 1 máy không kết nối với máy nào cả, tức là q_i=0 và có một máy kết nối với tất cả các máy còn lại (q_j=n-1). Vậy chỉ xảy ra 1 trong hai trường hợp sau:

$$0 \le qi \le n\text{-}2 \quad i=1..n$$

$$1 \le qi \le n\text{-}1 \quad i=1..n$$

Cả hai trường hợp trên n có q_i nhận n-1 giá trị. Theo nguyên lý Dirichlet, có $i \neq j$ sao cho $q_i = q_j$. Hay có ít nhất 2 trong số n máy tính có số máy kết nối với chúng bằng nhau.

b. Trong một mặt phẳng có 17 điểm phân biệt được nối với nhau từng đôi một bởi các đoạn thẳng màu xanh, hoặc màu đỏ, hoặc màu vàng. CMR luôn tồn tại ba điểm nối với nhau bởi các đoạn thẳng cùng màu

Chọn 1 điểm bất kỳ, giả sử là P, từ P ta nối với 16 điểm còn lại bởi các đoạn thẳng là màu xanh, hoặc màu đỏ, hoặc màu vàng.
Theo nguyên lý Dirichlet, trong 16 đoạn thẳng này sẽ có 6 đoạn thẳng có cùng màu. Giả sử 6 đoạn thẳng đó nối P với 6 điểm A, B, C, D, E, F có 2 trường hợp:

+ Sáu điểm A, B, C, D, E, F được nối với nhau từng đôi một bởi các đoạn thẳng, trong đó có ít nhất 1 đoạn thẳng có màu đỏ. Khi đó, đoạn thẳng màu đỏ này cùng với điểm P tạo thành 3 điểm nối với nhau bởi các đoạn thẳng có màu đỏ.

+ Sáu điểm A, B, C, D, E, F được nối với nhau từng đôi một bởi các đoạn thẳng không có màu đỏ, tức là các đoạn thẳng này có màu xanh hoặc vàng. Khi đó, chọn điểm bất kỳ (chẳng hạn điểm A) nối với 5 điểm còn lại bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc vàng. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 3 trong 5 đoạn thẳng có cùng màu, giả sử đó là màu xanh. Giả sử đó là các cạnh AB, AC và AD. Nếu có ít nhất một trong 3 đoạn thẳng BC, CD và DB có màu xanh thì cùng với điểm A tạo thành 3 điểm được nối với bởi màu xanh. Ngược lại, thì B, C, D là điểm được nối với nhau bởi màu vàng.

Như vậy, luôn tồn tại ba điểm nối với nhau bởi các đoạn thẳng cùng màu

Bài 27. ***Trong mặt phẳng xOy lấy ngẫu nhiên 5 điểm tọa độ nguyên. Chứng tỏ rằng có ít nhất một trung điểm của các đoạn nối chúng có tọa độ nguyên.***

Giả sử trong mặt phẳng xOy có A(x1,y1), B(x2,y2). Vậy trung điểm của đoạn thẳng AB sẽ là: $\left(\frac{x1+x2}{2},\frac{y1+y2}{2}\right)$. Các tọa độ này nguyên khi:

(x1,x2) đều chẵn hoặc đều lẻ, (y1,y2) đều chẵn hoặc đều lẻ.

Vì có 4 bộ bao gồm 2 phần tử có tính chẵn lẻ với nhau. Nên theo nguyên lý Dirichlet thì trong 5 điểm sẽ có ít nhất 2 điểm có tính chẵn lẻ như nhau. Do dó, trung điểm của 2 điểm này sẽ có tọa độ nguyên.

Bài 28. ***Cho trước các tập hợp gồm các phần tử xác định nào đó.***

a. Hãy cho biết các cách mô tả, hay biểu diễn một tập hợp? Cho ví dụ.

+ Nếu A là một tập hợp gồm một số hữu hạn phần tử, để biểu diễn tập A, ta có thể liệt kê hết các phần tử của A.

- Ví dụ biểu diễn A là tập hợp 4 chữ cái hoa đầu tiên: A={‘A’,’B’,’C’,’D’}

+ Nếu A là một tập hợp vô hạn các phần tử, để biểu diễn tập A, ta dùng cách biểu diễn tính chất của các phần tử, có dạng:

A={x | P(x)} là tập hợp các phần tử x, sao cho x thỏa mãn tính chất P

- Ví dụ biểu diễn A là tập hợp các số thực: $A=\{x \mid x \in R\}$

b. Hãy cho biết thế nào là một tập hợp đếm được, một tập hợp không đếm được? Cho ví dụ.

+ Nếu A là một tập hợp có hữu hạn phần tử, thì tập A được gọi là tập đếm được.
Ví dụ: A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A là tập đếm được vì nó có 9 phần tử, từ 1 đến 9
+ Nếu A là một tập hợp có vô hạn phần tử, thì tập A có thể là tập đếm được hoặc không đếm được. Để xác định A có đếm được hay không ta chỉ cần xây dựng song ánh giữa tập A với tập các số tự nhiên N.
Ví dụ: Cho A là tập hợp các số phức. A là tập vô hạn không đếm được.

c. Cho A là tập không đếm được, B là tập đếm được. Hãy cho biết tập hợp A-B (hiệu) có đếm được hay không?

Giả sử A-B là tập đếm được, khi đó $A=(A-B)\cup B$ cũng là tập hợp đếm được, vì:

(A-B) : là tập đếm được theo giả thiết.

B : là tập đếm được theo đề bài.

Mâu thuẩn với đề bài đã cho là A là tập không đếm được. Vậy A-B là tập không đếm được.

d. CMR tích Decac của hai tập hợp vô hạn đếm được cũng là một tập vô hạn đếm được?

Tích Decac AxB là tập tất cả các cặp phần tử có trật tự sắp xếp (a,b) được tạo ra bởi một phần tử $a\in A$ với các phần tử đứng kế tiếp $b\in B$.

Giả sử $A=\{a_i, i=1..n\}$; $B=\{b_j, j=1..n\}$

Ta xây dựng một (bảng) ma trận hai chiều, đầu mỗi hàng là một phần tử của A, đầu mỗi cột là phần tử của B. Khi đó, các phần tử của tích Decac AxB là các phần tử của ma trận.

	b_1	b_2	…	b_n
a_1	$\boldsymbol{a_1b_1}$	$\boldsymbol{a_1b_2}$	..	$\boldsymbol{a_1b_n}$
a_2	$\boldsymbol{a_2b_1}$	$\boldsymbol{a_2b_2}$	…	$\boldsymbol{a_1b_n}$
…	..	..	..	..
a_n	$\boldsymbol{a_nb_1}$	$\boldsymbol{a_nb_2}$	…	$\boldsymbol{a_nb_n}$

Từ ma trận trên ta suy ra AxB là đếm được.

Bài 29. *(Đề thi cao học Đà Nẵng – 5/2007)*

Cho dãy $u = <a_1, a_2, \ldots, a_n>$ trong đó a_i là các ký tự tùy ý, $i \in 1..n$, n là độ dài của dãy u đã cho. Một dãy $v = <b_1, b_2, \ldots, b_m>$ được gọi là dãy con của dãy u nếu tìm được dãy các chỉ số $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < im \le n$ và $b_k = a_{ik}$ với mọi $k \in 1..m$.

Chẳng hạn dãy v = < B, C, D, B> là dãy con của dãy u = < A, B, C, B, D, A, B> với dãy chỉ số là <2, 3, 5, 7>.

Một dãy w được gọi là dãy con chung của hai dãy u và v đã cho, nếu w vừa là dãy con của u và vừa là dãy con của v. Một dãy con chung được gọi là lớn nhất nếu có độ dài lớn nhất trong số các dãy con của các dãy đã cho.

Chẳng hạn, các dãy <A, B, B, C> và <B, D, A, B> đều là dãy con chung lớn nhất của hai dãy <A, B, C, B, D, A, B> và <B, D, C, A, B, A>.

Gọi C(i,j) là độ dài của một dãy con chung lớn nhất của hai dãy X= <a1, a2, … an> và Y= <b1, b2, … bm> (0≤i≤n, 0≤j≤m). Người ta tìm được công thức đệ quy tính C(i,j) như sau:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0, & i = 0 \quad or \quad j = 0 \\ c[i-1, j-1] + 1 & i, j > 0 \quad and \quad x_i = y_j \\ \max\{c[i, j-1], c[i-1, j]\} & i, j > 0 \quad and \quad x_i \ne y_j \end{cases}$$

a, Hãy giải thích công thức đệ quy trên:

- Nếu i=0 hoặc j=0 thì C[i,j] = 0.
- Nếu *i*>0, *j*>0:

+ Nếu $X_i = Y_j$ thì dãy con chung dài nhất của X_i và Y_j sẽ thu được bằng việc bổ sung X_i vào dãy con chung dài nhất của hai dãy X_{i-1}và Y_{j-1}

+ Nếu $X_i \neq Y_j$ thì dãy con chung dài nhất của X_i và Y_j sẽ là dãy con dài nhất trong hai dãy con chung dài nhất của (X_i và Y_{i-1}) và của (X_{i-1} và Y_j).

b, Viết hàm RecMaxSubSeq dùng phương pháp lặp tính độ dài dãy con chung lớn nhất của hai dãy trên.

```
Type Mang= array[1..50,1..50] of  byte;
Function   RecMaxSubSeq (X,Y,m,n): Mang;
Var i,j: Byte; C: Mang;
Begin
        for i :=1 to n do c[i,0]:=0;
        for j: =1 to m do c[0,j]:=0;
        for i: =1 to n do
               for j: = 1to m do
                  if x[i] = y[i] then
                          c[i,j]:=c[i-1,j-1]+1
                  else    if c [i-1,j]≥c[i,j-1] then
                                   c[i,j]:=c[i-1,j]
                          else     c[i,j]:=c[i,j-1];
    RecMaxSubSeq :=C;
    End;
```

Kỹ thuật đếm nâng cao

Bài 1. ***Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi:***

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0=0$ và $a_1=1$.

a. ***Giải hệ thức truy hồi trên.***

Ta có phương trình đặt trưng : $x^2 = 5x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

có 2 nghiệm phân biệt : $x_1 = 3$ và $x_2 = 2$

Hệ thức truy hồi có dạng: $a_n = b3^n + d2^n$ (1)

Với $a_0=0$, $a_1=1$thay lần lượt vào (1), ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases}$$

=> b = 1, d = -1

Vậy hệ thức truy hồi là : $a_n = 3^n - 2^n$

b. ***Viết hàm A(n) để tính a_n***

```
Function      A(n: integer): Integer;
Begin
        If n=0 then A:=0
        Else if n=1 then A:=1
             Else
                        A:=5*A(n-1) – 6*A(n-2);
End;
```

Bài 2. ***Giải hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$; $a_0=1$, $a_1=6$***

Ta có phương trình đặt trưng : $x^2 = 6x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

PT có nghiệm kép : x = 3

Hệ thức truy hồi có dạng: $a_n = b3^n + d.n.3^n$

Thay $a_0=1$ và $a_1=6$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} b = 1 \\ 3b + 3d = 6 \end{cases} \Rightarrow b = 1, d = 1$$

Vậy hệ thức truy hồi là : $a_n = 3^n + n3^n = (1+n)\,3^n$

Bài 3. ***Giải hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$; $a_0=0$, $a_1=-4$ và $a_2=8$***

Ta có phương trình đặt trưng : $x^3 = 2x^2 + 5x^2 - 6$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0$

có 3 nghiệm phân biệt : $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -2$

Hệ thức truy hồi có dạng: $a_n = b + d.3^n + c.(-2)^n$

Thay $a_0 = 0$, a1=-4, a2 = 8, ta có hệ phương trinh :

$$\begin{cases} b + d + c = 0 \\ b + 3d - 2c = -4 \\ b + 9d + 4c = 8 \end{cases}$$

=> b = -24/15, d = 1/5, c=22/15

Vậy : $a_n = -\dfrac{24}{15} + \dfrac{3^n}{5} + \dfrac{22}{15}(-2)^n$

Bài 4. *(Đề thi cao học ĐH KHTN TP HCM 2010)*

a.Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ qui: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

Phương trình đặc trưng là: $x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = -2$ và $x_2 = 3$.

Nên nghiệm tổng quát là: $a_n = c(-2)^n + d3^n$

b. Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu $a_0 = 8$, $a_1 = 5$ của hệ thức đệ qui: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1}$

Đặt $f_n = 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1} = (-2)^n(10n + 3/2)$.

Vì -2 là 1 nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng:

$$n(-2)^n(An + B). \quad (*)$$

Thế (*) vào hệ thức ban đầu, ta có:

$n(-2)^n(An + B) = (n-1)(-2)^{n-1}(A(n-1) + B) + 6(n-2)(-2)^{n-2}(A(n-2) + B) + (-2)^n(10n + 3/2)$ (**).

Thế n = 2 vào (**), ta có: $2(-2)^2(2A + B) = (-2)(A + B) + (-2)^2(10.2 + 3/2)$

$$\Leftrightarrow 16A + 8B = -2A - 2B + 86$$

$$\Leftrightarrow 18A + 10B = 86$$

$$\Leftrightarrow 9A + 5B = 43 \ (***)$$

Thế n = 1 vào (**), ta có:

$$(-2)(A + B) = 6(-1)(-2)-1(B - A) + (-2)(10 + 3/2)$$

$$\Leftrightarrow -2A - 2B = 3B - 3A - 23$$

$$\Leftrightarrow A - 5B = -23 \ (****)$$

Từ (***) và (****) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9A + 5B = 43 \\ A - 5B = -23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 2 \text{ và } B = 5$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ thức là: $a_n = b(-2)^n + c3^n + n(-2)^n(2n + 5)$

Với $a_0 = 8$, ta có:

$$8 = b(-2)^0 + c3^0 + 0(-2)^0(2.0 + 5)$$

$$\Leftrightarrow b + c = 8 \ (1)$$

Với $a_1 = 5$, ta có:

$$5 = b(-2)^1 + c3^1 + 1(-2)^1(2.1 + 5)$$

$$\Leftrightarrow -2b + 3c = 19 \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b + c = 8 \\ -2b + 3c = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 1 \text{ và } c = 7.$$

Vậy nghiệm của hệ thức đệ qui là: $a_n = (-2)^n + 7.3^n + n(-2)^n(2n + 5)$

Bài 5. ***Gọi a_n là số dãy bit độ dài n không có 2 bit 0 liền nhau.***

a. *Tìm hệ thức truy hồi cho a_n*

Dãy bit độ dài n không có 2 bit 0 liền nhau có 1 trong 2 dạng :

- A1 : A có n-1 bit và không có 2 bit 0 liền nhau.
  Có $a_{(n-1)}$ trường hợp
- B10: B có n-2 bit và không có 2 bit 0 liền nhau.
  Có $a_{(n-2)}$ trường hợp

Vậy hệ thức truy hồi : $a_n = a_{(n-1)} + a_{(n-2)}$

b. *Biết giá trị đầu a_1=2, a_2=3, giải hệ thức truy hồi trên*

Phương trình đặc trưng: $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm riêng biệt là:

$$x1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Vậy a_n có dạng: $$a_n = b(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + d(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \qquad (1)$$

Theo hệ thức truy hồi, ta có : $a_2 = a_1 + a_0 \Rightarrow a_0 = a_2 - a_1 = 1$

Với a_0=1 và a_1=2, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b + d = 1 \\ b(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + d(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}), d = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

Vậy: $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1}$$

c. *Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân chứa xâu 00*

Gọi S_n là số chuỗi nhị phân độ dài n (n ≥2) có 2 bit 0 liền nhau. S_n sẽ có một trong các dạng sau:

A1: Trong đó: A có độ dài n-1 và chứa xâu 00, số chuỗi là: $S_{(n-1)}$

B10: B có độ dài n-2 và chứa xâu 00, số chuỗi là: $S_{(n-2)}$

C00: C tùy ý có độ dài n-2, số chuỗi là: $2^{(n-2)}$

Ta có công thức truy hồi: $S_n=S_{(n-1)}+S_{(n-2)}+ 2^{(n-2)}$

Bài 6. *(Đề thi cao học Đà Nẵng – 9/2010)*

Cho biết dân số của Việt Nam năm 2007 là 86 triệu người. Giả sử tốc độ tăng dân số hằng năm là 0,2% mỗi năm. Gọi D_n là dân số của Việt Nam n năm sau 2007

a. Lập hệ thức truy hồi tính D_n.

Gọi:

D_0 là tổng dân số Việt Nam năm 2007, D_0 = 86 triệu người

D_1 là tổng dân số Việt Nam năm 2008 :

$$D_1 = D_0 + 0,002.D_0=1,002.D_0$$

…………………………..

Dn là tổng dân số Việt Nam n năm sau năm 2007

$$D_n = D_{n-1} + 0,002D_{n-1} \quad = 1,002.D_{n-1}$$

b. Dân số Việt Nam năm 2020 là bao nhiêu?

Thế lần lượt $D_{n-1} = 1,002.D_{n-2}$ vào D_n
$D_{n-2} = 1,002D_{n-3}$ vào D_{n-1}
……..

Cuối cùng ta có : $D_n = (1,002)^n.D_0 = 86.(1,002)^n$ triệu người.

Theo đề bài, ta có: n = 2020 – 2007 = 13

Như vậy sau 13 năm dân số Việt Nam là:

$D_{13} =86.(1,002)^{13}$ triệu người.

Bài 7. ***Giả sử lãi suất ngân hàng là 2% một năm. Tính tổng số tiền có trong tài khoản sau 10 năm, nếu tiền gửi ban đầu tài 10 triệu.***

P_0 là số tiền ban đầu : P_0 = 10 triệu

P_1 là tổng số tiền sau 1 năm gửi: $P_1 = P_0 + 0,02P_0 = 1,02P_0$

P_2 là tổng số tiền sau 2 năm gửi: $P_2 = P_1 + 0,02P_1 =1,02P_1$

$$= 1,02 . 1,02 P_0 = (1,02)^2P_0$$

…..

P_n là tổng số tiền sau n năm gửi: $P_n = P_{n-1} + 1,02P_{n-1}$

$$\ldots.$$

$$= (1,02)^n P_0$$

Với n=10, ta có: $P_{10} = (1,02)^{10}P_0 = (1,02)^{10}.10 = 12,189$ triệu đồng.

Bài 8. ***Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số chuỗi nhị phân độ dài n có 4 bít 0 liên tiếp. Ứng dụng tính số chuỗi với n=8.***

Gọi S_n là số chuỗi nhị phân độ dài n (n ≥4) có 4 bit 0 liên tiếp. S_n sẽ có một trong các dạng sau:

A1: Trong đó A chứa 4 bit 0 liên tục, số chuỗi là: $S_{(n-1)}$

B10: B chứa 4 bít 0 liên tục, số chuỗi là: $S_{(n-2)}$

C100: C chứa 4 bít 0 liên tục, số chuỗi là: $S_{(n-3)}$

D1000: D chứa 4 bít 0 liên tục, số chuỗi là: $S_{(n-4)}$

E0000: E tùy ý có độ dài n-4, số chuỗi là $2^{(n-4)}$

Ta có công thức truy hồi: $S_n=S_{(n-1)}+S_{(n-2)}+S_{(n-3)}+S_{(n-4)}+2^{(n-4)}$

Điều kiện đầu là:

S1=S2=S3=0; S4=1 (Nghĩa là, với n=1, 2, 3 không có chuỗi nào, n=4 có duy nhất 1 chuỗi, đó là: 0000).

Dùng phương pháp thế để giải, như sau:

$s_5 = s_4+s_3+s_2+s_1+2 = 1+0+0+0+2 = 3$ (chuỗi độ dài 5 có 3 trường hợp 0000 kề nhau: 00000, 10000, 00001)

$s_6 = s_5 + s_4 + s_3 + s_2 + 2^2 = 3 + 1 + 0 +0+4 = 8$

$s_7 = s_6 + s_5 + s_4 + s_3 + 2^3 = 8 + 3 + 1+0 + 8 = 20$

$s_8 = s_7 + s_6 + s_5 + s_4 + 2^4 = 20 + 8 + 3 + 1 + 16 = 48$

Vậy có 48 chuỗi nhị phân có độ dài 8 chứa 4 bits 0 kề nhau.

Bài 9. ***Tìm HTTH mà R_n thỏa mãn, trong đó R_n là số miền của mặt phẳng bịphân chia bởi n đường thẳng nếu không có hai đường nào song song và không có 3 đường nào cùng đi qua 1 điểm.***

- Nếu không có đường thẳng nào, tức n=0 thì có 1 mặt phẳng: $R_n = 1$.
- Nếu có 1 đường thẳng, tức n=1 thì nó chia mặt phẳng thành 2: $R_n = 2$.
- Nếu n > 1, giả sử n-1 đường thẳng chia mặt phẳng thành R_{n-1} miền.

Theo đề bài không có 2 đường thẳng nào song song với nhau, nên đường thẳng thứ n sẽ cắt n-1 đường thẳng còn lại tại n-1 giao điểm.

Vì không có 3 đường thẳng đi qua một 1 điểm, nên n-1 giao điểm trên khác nhau từng đôi một và chúng tạo ra n-2 đoạn và 2 nửa đoạn trên đường thẳng thứ n. Mỗi đoạn và nửa đoạn này chia miền mà nó đi qua thành 2 miền mới, nghĩa là làm tăng thêm 1 miền. Do đó đường thẳng thứ n làm tăng thêm (n-2) + 2 = n miền.

Vậy HTTH là: $R_n = R_{n-1} + n$.

Bài 10. ***Viết HTTH của cos(nx) và sin(nx)***

$$\sin(nx) = 2\sin((n-1)x)\cos(x) - \sin((n-2)x)$$

$$\cos(nx) = 2\cos((n-1)x)\cos(x) - \cos((n-2)x)$$

Logic mệnh đề

Bài 1. ***Viết bảng giá trị chân lý của các phép toán mệnh đề***

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\oplus q$	$\overline{p}$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T	T

Bài 2. ***Hãy nêu các công thức trong logic mệnh đề***

Số TT	Tên gọi	Công thức
1.	Quy tắc phủ định kép	$\overline{\overline{A}} \equiv A$
2.	Tính chất giao hoán	$A \vee B \equiv B \vee A$ $A \wedge B \equiv B \wedge A$
3.	Tính chất kết hợp	$(A\vee B) \vee C \equiv A \vee (B\vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
4.	Tính chất phân bố	$A\vee (B \wedge C) \equiv (A\vee B) \wedge (A\vee C)$ $A \wedge (B\vee C) \equiv (A\wedge B) \vee (A\wedge C)$
5.	Quy tắc Đơ-Moocgan	$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$
6.	Tính lũy đẳng	$A\vee A \equiv A$ $A \wedge A \equiv A$
7.	Tính đồng nhất	$A \wedge T \equiv A$ $A \vee F \equiv A$
8.	Tính nuốt	$A \vee T \equiv T$ $A \wedge F \equiv F$
9.	$p \oplus q \equiv (p\vee q)\wedge(\overline{p \wedge q})$ $p \leftrightarrow q \equiv (p\to q) \wedge (q\to p)$ $\equiv$ dấu tương đương (<=>)	$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$ $\overline{A} \vee A \equiv T$ $\overline{A} \wedge A \equiv F$

Bài 3. ***Chứng minh***

a. $(p \wedge \overline{q}) \to (p \oplus r) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q \vee \overline{r}$

$(p \wedge \overline{q}) \to (p \oplus r) \Leftrightarrow \overline{(p \wedge \overline{q})} \vee (p \oplus r)$ (Đ/n $\to$)

$\Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge \overline{(p \wedge r)})$ (Luật De Morgan và Đ/n$\oplus$)

$\Leftrightarrow (q \vee \overline{p}) \vee ((p \vee r) \wedge (\overline{p} \vee \overline{r}))$ (Luật De Morgan và giao hoán)

$\Leftrightarrow q \vee (\overline{p} \vee ((p \vee r) \wedge (\overline{p} \vee \overline{r}))$ (Luật kết hợp)

$\Leftrightarrow q \vee ((\overline{p} \vee (p \vee r)) \wedge (\overline{p} \vee (\overline{p} \vee \overline{r})))$ (Luật phân phối)

$\Leftrightarrow q \vee (((\overline{p} \vee p) \vee r) \wedge ((\overline{p} \vee \overline{p}) \vee \overline{r})))$ (Luật kết hợp)

$\Leftrightarrow q \vee ((T \vee r) \wedge (\overline{p} \vee \overline{r}))$ (Luật bù)

$\Leftrightarrow q \vee (T \wedge (\overline{p} \vee \overline{r}))$ (Luật nuốt)

$\Leftrightarrow q \vee (\overline{p} \vee \overline{r})$ (Luật đồng nhất)

$\Leftrightarrow \overline{p} \vee q \vee \overline{r}$ (Luật giao hoán)

b. $(p \to q) \wedge [\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q})] \equiv \overline{(q \vee p)}$

$(p \to q) \wedge [\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q})] \equiv (\overline{p} \vee q) \wedge [(\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{q})]$

$\equiv (\overline{p} \vee q) \wedge [(\overline{q} \wedge r) \vee \overline{q}]$

$\equiv (\overline{p} \vee q) \wedge [(r \vee T) \wedge \overline{q}]$

$\equiv (\overline{p} \vee q) \wedge [T \wedge \overline{q}]$

$\equiv (\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$

$\equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \vee q \wedge \overline{q}$

$\equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \vee F$

$\equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

$\equiv \overline{p \vee q}$

c. $[(p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p})] \to q \equiv 1$

$[(p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p})] \to q \equiv [0 \vee (q \wedge \overline{p})] \to q$ (Luật đúng sai)

$\equiv (q \wedge \overline{p}) \to q$ (Luật đồng nhất)

$\equiv \overline{(q \wedge \overline{p})} \vee q$ (Đ/n $\to$)

$\equiv (\overline{q} \vee p) \vee q$ (Luật De Morgan)

$\equiv (\overline{q} \vee q) \vee p$ (Luật kết hợp)

$\equiv 1 \vee p$ (Luật đúng sai)

$\equiv 1$ (Luật trội)

Bài 4. ***Viết biểu thức mệnh đề của:***

a. Bạn không được phép lái xe máy nếu bạn chưa cao đến 1,5m, trừ khi bạn đủ 18 tuổi và có giấy phép lái xe.

Ta đặt các biến mệnh đề: p : Bạn được phép lái xe máy.
q : Bạn cao dưới 1,5 m
r : Bạn đủ 18 tuổi.
s : Bạn có giấy phép lái xe.

$\Rightarrow \quad q \wedge \overline{r} \wedge \overline{s} \to \overline{p}$

Hoặc : $\overline{q} \wedge r \wedge s \to p$.

b. Đặt P, Q lần lượt là các mệnh đề:

P := " Minh học chăm", Q:= " Minh có kết quả học tập tốt"

Hãy viết lại các mệnh đề sau dưới dạng hình thức trong đó có sử dụng các phép nối.

**** Minh học chăm và có kết quả học tập tốt:*** $P \wedge Q$

**** Minh học chăm hay Minh có kết quả học tập tốt:*** $P \vee Q$

**** Nếu Minh học chăm thì Minh có kết quả học tập tốt:*** $P \to Q$

**** Minh có kết quả học tập tốt khi và chỉ khi Minh học chăm:*** $Q \Leftrightarrow P$

Bài 5. *(Đề thi cao học ĐHSP HN - 2006)*

a. Cho trước mệnh đề logic

$F = (P \to (R \wedge Q)) \vee (\overline{P} \wedge (Q \to (R \wedge P)))$,

Trong đó P, Q, R là ba mệnh đề logic và $^{-}$ ***là phép phủ định.***

- Khử phép kéo theo $\rightarrow$ và rút gọn mệnh đề F.

$F = (P \rightarrow (R \wedge Q)) \vee (\overline{P} \wedge (Q \rightarrow (R \wedge P)))$

$= (\overline{P} \vee (R \wedge Q)) \vee (\overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee (R \wedge P)))$

$= (\overline{P} \vee (R \wedge Q)) \vee ((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge (R \wedge P)))$

$= \overline{P} \vee (R \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$ ($\overline{P} \wedge P$=F (Luật đúng), F$\wedge$R=F (Luật trội))

$= \overline{P} \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (R \wedge Q)$ (Luật giao hoán).

$= \overline{P} \wedge (T \vee (T \wedge \overline{Q}) \vee (R \wedge Q)$

$= \overline{P} \vee (R \wedge Q)$

- Tìm dạng chuẩn hội chính tắc của mệnh đề F.

Ta có : $F = \overline{P} \vee (R \wedge Q)$

$= \overline{\overline{\overline{P} \vee (R \wedge Q)}}$ (Luật bù kép)

$= \overline{P \wedge \overline{(R \wedge Q)}}$ (Luật De Morgan)

$= \overline{P \wedge (\overline{R} \vee \overline{Q})}$ (Luật De Morgan)

$= \overline{(P \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{Q})}$ (Luật phân phối)

$= \overline{(P \wedge \overline{R})} \wedge \overline{(P \wedge \overline{Q})}$ (Luật De Morgan)

$= (\overline{P} \vee R) \wedge (\overline{P} \vee Q)$ (Luật De Morgan)

b. Biết rằng mệnh đề P(x,y) được phát biểu là "x + y = 0", với x, y là các số thực. hãy cho biết chân trị của các mệnh đề dưới đây và giải thích tại sao?

****. $\forall$x $\exists$y P(x,y)***

Mệnh đề $\forall$x $\exists$y P(x,y) luôn luôn có giá trị đúng (True), vì với mọi x, luôn tồn tại một giá trị y=-x, làm cho biểu thức x+y=0, ví dụ: P(1,-1), P(2,-2)…

****. $\exists$x $\forall$y P(x,y)***

Mệnh đề $\exists$x$\forall$y P(x,y) luôn luôn có giá trị sai (False), vì không có giá trị nào của y làm cho biểu thức x+y=0 với mọi x.

Bài 6. ***Dùng bảng chân trị chứng minh rằng :*** $\overline{A \vee B \vee C} = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$

A	B	C	$A \vee B \vee C$	$\overline{A \vee B \vee C}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$
0	0	0	0	**1**	1	1	1	**1**
0	0	1	1	**0**	1	1	0	**0**
0	1	0	1	**0**	1	0	1	**0**
0	1	1	1	**0**	1	0	0	**0**
1	0	0	1	**0**	0	1	1	**0**
1	0	1	1	**0**	0	1	0	**0**
1	1	0	1	**0**	0	0	1	**0**
1	1	1	1	**0**	0	0	0	**0**

Bài 7. ***Trình bày các quy tắc suy diễn trong logic mệnh đề***

Tên gọi	Quy tắc	Hằng đúng cơ sở
Luật cộng	$\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \to (p \vee q)$
Luật rút gọn	$\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \to p$
Phương pháp khẳng định	$\dfrac{\begin{array}{l} p \to q \\ p \end{array}}{\therefore q}$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
Phương pháp phủ định	$\dfrac{\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \end{array}}{\therefore \neg p}$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg q$
Tam đoạn luận giả định	$\dfrac{\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \end{array}}{\therefore p \to r}$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
Tam đoạn luận rời	$\dfrac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{\therefore q}$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$

Bài 8. ***Viết suy luận của phát biểu sau:***

Ông Minh đã khẳng định rằng nếu không được tăng lương thì ông sẽ nghỉ việc. Mặt khác nếu ông ta nghỉ việc và vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì sẽ mất việc. Cuối cùng ông đã được tăng lương. Vậy suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông không đi làm trễ.

Ta đặt các biến mệnh đề như sau:

q: Ông Minh được tăng lương; r: Ông Minh nghỉ việc

s: Vợ ông Minh mất việc; t: Ông Minh phải bán xe.

p: Vợ ông Minh hay đi làm trễ.

Suy luận trên được viết lại như sau:

$$\begin{array}{l} \overline{q} \to r \\ (r \wedge s) \to t \\ p \to s \\ q \\ \hline \therefore\ \overline{t} \to \overline{p} \end{array}$$

Bài 9. *(Đề thi cao học Đà Nẵng – 2/2009)*

a. Suy luận sau đúng hay sai: Nếu bò sữa nhiều và sữa tốt thì sẽ được cho ăn thêm nhiều cỏ non. Bò ăn thêm nhiều cỏ non thì sẽ mập lên. Nhưng thực tế bò không mập lên. Kết luận bò không cho nhiều sữa hoặc không cho sữa tốt.

Ta đặt các biến mệnh đề như sau:

q: bò cho sữa nhiều.

r: bò cho sữa tốt.

p: bò được cho ăn thêm nhiều cỏ non.

s: bò mập lên.

Suy luận được viết lại như sau:

$$\begin{array}{ll} q \wedge r \to p & (1) \\ p \to s & (2) \\ \overline{s} & (3) \\ \hline \therefore\ \overline{q} \vee \overline{r} & \end{array}$$

$q \wedge r \rightarrow s$ (4) (Tam đoạn luận 1 và 2)

$\overline{s}$ (5) (Tiền đề)

$\overline{q \wedge r}$ (Do 4, 5 và luật phủ định)

$\overline{q} \vee \overline{r}$ (Luật De Morgan)

Vậy suy luận trên là đúng.

b. Cho biết biểu thức nào trong số các biểu thức sau đây là đồng nhất đúng

1. pqr → p+q là đồng nhất đúng:

p	q	r	pqr	p+q	pqr → p+q
0	0	0	0	0	**1**
0	0	1	0	0	**1**
0	1	0	0	1	**1**
0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	0	1	**1**
1	1	1	1	1	**1**

2. (p → q(q→r)) → (p→r) là đồng nhất đúng:

p	q	r	q→r	q(q→r)	p → q(q→r))	p→r	(p → q(q→r)) → (p→r)
0	0	0	1	0	1	1	**1**
0	0	1	1	0	1	1	**1**
0	1	0	0	0	1	1	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	0	0	0	**1**
1	0	1	1	0	0	1	**1**
1	1	0	0	0	0	0	**1**
1	1	1	1	1	1	1	**1**

3. (p → q) → p không đồng nhất đúng:

p	q	p→q	(p→ q) →p
0	0	1	**0**
0	1	1	**0**

1	0	0	**1**
1	1	1	**1**

4. (p ≡ (q+r)) → ($\bar{q}$ →pr) không đồng nhất đúng:

p	q	r	q+r	p ≡ (q+r)	$\bar{q}$	pr	$\bar{q}$ →pr	(p ≡ (q+r)) → ($\bar{q}$ →pr)
0	0	0	0	1	1	0	0	**0**
0	0	1	1	0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	0	0	0	1	**1**
0	1	1	1	0	0	0	1	**1**
1	0	0	0	0	1	0	0	**1**
1	0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	0	0	1	**1**
1	1	1	1	1	0	1	1	**1**

c. Tìm giá trị các biến Boole x và y thỏa mãn phương trình xy = x + y

x	y	xy	x + y
0	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Bài 10. ***Hãy kiểm tra các suy luận sau và cho biết đã sử dụng quy tắc suy diễn nào?***

a)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg r \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg(p \vee r) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to \neg q \\ r \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

c,
$$\begin{array}{l} t \to u \\ r \to (s \vee t) \\ (\neg p \vee q) \to r \\ \neg(s \vee u) \\ \hline \therefore p \end{array}$$

a. ((p→q) ∧ ¬q) →¬p (Quy tắc phủ định)

¬r ∧ ¬p ≡ ¬(r ∨ p) (De Morgan)

b.	$r \to \neg q \equiv q \to \neg r$	(Luật phản đảo)
	$p \to \neg r$	(Luật tam đoạn)
	$\neg p \vee \neg r$	(Đ/n $\to$)
	$\neg p$	(Luật rút gọn)

c.	$t \to u$	(1)
	$r \to (s \vee t)$	(2)
	$(\neg p \vee q) \to r$	(3)
	$\neg (s \vee u)$	(4)

____

$\therefore$ p

$\neg s \wedge \neg u$	(Do tiền đề (4) và luật De Morgan)	(5)
$\neg u$	(Do (5) và luật đơn giản nối liền)	(6)
$\neg t$	(Do (1), (6) và luật phủ định)	(7)
$\neg s$	(Do (5) và luật đơn giản nối liền)	(8)
$\neg t \wedge \neg s$	(Do (7), (8) và phép toán nối liền)	(9)
$\neg (s \vee t)$	(Do (9) và luật De Morgan)	(10)
$\neg r$	(Do (2), (10) và luật phủ định)	(11)
$\neg (\neg p \vee q)$	(Do (3), (11) và luật phủ định)	(12)
$p \wedge \neg q$	(Do (12) và luật De Morgan)	(13)
p	(Do (13) và luật đơn giản nối liền)	

Đại số Boole

Bài 1. ***Trình bày các tính chất của các phép toán Boole***

1. Tính giao hoán:	a.b = b.a
	a+b = b+a.
2. Tính kết hợp:	(a.b).c = a.(b.c)
	(a+b)+c = a+(b+c).
3. Tính phân phối:	a.(b+c) = (a.b)+(a.c)
	a+(b.c) = (a+b).(a+c).
4. Tính đồng nhất:	a.1 = 1.a = a
	a+0 = 0+a = a.
5. Tính bù:	$\bar{a}.a = a.\bar{a} = 0$
	$\bar{a} + a = a + \bar{a} = 0$
6. Tính nuốt	a.0 = 0
	a+1 = 1
7. Tính luỹ đẳng	a.a = a
	a+a = a.
8. Hệ thức De Morgan	$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$
	$\overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}$
9. Tính bù kép	$\bar{\bar{a}} = a$
10. Tính hút	a.(a+b) = a
	a+(a.b) = a.

Bài 2. ***Tối thiểu hàm Bool bằng bảng Karnaugh***

a) $F(x,y,z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x		1	1	
$\overline{x}$	1		1	

Việc nhóm thành các khối cho thấy rằng: Có 2 cặp hình vuông kề nhau, cặp ngang biểu diễn cho $x\overline{z}$, cặp đứng biểu diễn cho $\overline{y}\,\overline{z}$ và 1 hình vuông cô lập biểu diễn cho $\overline{x}yz$; vì vậy: $x\overline{z}$, $\overline{y}\,\overline{z}$ và $\overline{x}yz$ là các nguyên nhân nguyên tố của F(x,y,z). Do đó, ta có hàm tuyển chuẩn tắc tối thiểu là:

$$F(x,y,z) = x\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz$$

b) $x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x			1	1
$\overline{x}$	1		1	1

$$F(x,y,z) = y + \overline{x}z$$

c) $xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x	1	1	1	1
$\overline{x}$	1		1	1

$$F(x,y,z) = x + \overline{y} + z$$

Bài 3. *(Đề thi cao học Đà Nẵng - 8/2008)*

a. *Tìm các giá trị của hàm Boole được biểu diễn:*

$$F(x,y,z) = xy + \bar{z}$$

x	y	z	$\bar{z}$	xy	$xy + \bar{z}$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

b. *Tối thiểu hàm Boole*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y \\ &= \bar{y}(x+\bar{x}) + \bar{x}y = \bar{y}.1 + \bar{x}y = \bar{y} + \bar{x}y \\ &= \bar{x} + \bar{y} \end{aligned}$$

c. *Tối thiểu hóa hàm Boole bằng bảng Karnaugh :*

$$F(x,y) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		**1**	**1**	
$\bar{x}$	**1**			**1**

⇨ $F(x,y) = x\bar{z} + \bar{x}z$

Bài 4: Tìm dạng chuẩn tắc của hàm

$$F(x,y,z) = (x+y)\overline{z}$$

Ta lập bảng giá trị của hàm F như sau:

x	y	z	$\overline{z}$	x+y	$(x+y)\overline{z}$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Ta thấy F(x,y,z) bằng 1 khi :

x=0, y=1, z=0

hoặc x=1, y=0, z=0

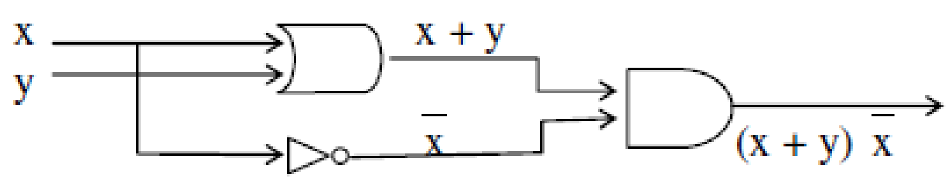
hoặc x=1, y=1, z=0

Vậy dạng chuẩn tắc của hàm F :

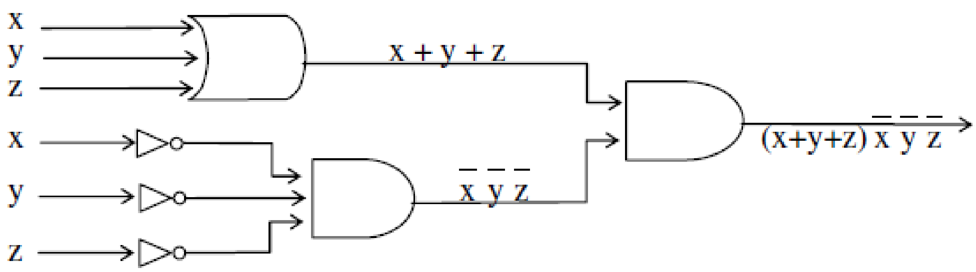
$$F(x,y,z) = \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z}$$

Bài 5: Vẽ mạch logic của các hàm sau:

a. $F(x,y) = (x+y)\overline{x}$



b. $F(x,y) = (x+y+z)\overline{x}\overline{y}\overline{z}$



Bài 6.

a, Dạng tuyển đầy đủ của F

Tập các thể hiện làm cho giá trị của F(x,y,z) bằng 1 là: {000, 010, 100, 110, 111}. Từ tập các thể hiện này ta lập các từ tối thiểu tương ứng : $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, $\overline{x}y\overline{z}$, $x\overline{y}\,\overline{z}$, $xy\overline{z}$, xyz. Như vậy, dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ của F như sau:

$$F(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + xyz$$

b, Dạng chuẩn tắc tối thiểu

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + xyz \\ &= \overline{x}\,\overline{z}(\overline{y} + y) + x\overline{z}(\overline{y} + y) + xyz \\ &= \overline{x}\,\overline{z} + x\overline{z} + xyz \\ &= (\overline{x} + x)\overline{z} + xyz \\ &= \overline{z} + xyz \end{aligned}$$

Bài 7.

a, Dạng tuyển đầy đủ của F

Tập các thể hiện làm cho giá trị của F(w,x,y,z) bằng 1 là: {1111, 1101, 1100, 1010, 1000, 0110, 0101, 0100, 0010}. Từ tập các thể hiện này ta lập các từ tối thiểu tương ứng : wxyz, $wx\overline{y}z$, $wx\overline{y}\,\overline{z}$, $w\overline{x}y\overline{z}$, $w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, $\overline{w}xy\overline{z}$, $\overline{w}x\overline{y}z$, $\overline{w}x\overline{y}\,\overline{z}$, $\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$. Như vậy, dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ của F như sau:

$$F(x,y,z) = wxyz + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$$

b, Dạng chuẩn tắc tối thiểu

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= wxyz + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}xy\overline{z} + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} \\ &= wxz(y + \overline{y}) + wx\overline{z}(y + \overline{y}) + w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{z}(w\overline{x}y + \overline{w}\,\overline{x}y) + \overline{w}x\overline{y}(z + \overline{z}) \end{aligned}$$

$$= wxz + wx\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{z}(\bar{w}y(x + \bar{x})) + \bar{w}x\bar{y}$$

$$= \mathrm{wx}(z + \bar{z}) + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}$$

$$= \mathrm{wx} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}$$

Bài 8. Tìm dạng chuẩn tắc của biểu thức

$$f(x,y,z) = \overline{\overline{(xy)}z(\bar{x}+z)(\bar{y}+\bar{z})}$$

$$= (xy+\bar{z})(\overline{(\bar{x}+z)} + \overline{(\bar{y}+\bar{z})})$$ (Luật De Morgan)

$$= (xy+\bar{z})(x\bar{z} + \mathrm{yz})$$ (Luật De Morgan)

$$= xyx\bar{z} + xyyz + x\bar{z}\bar{z} + yz\bar{z}$$ (Luật phân phối)

$$= xy\bar{z} + xzy + x\bar{z} + 0$$ (Luật lũy đẳng: x.x = x

Luật bù: $z\bar{z} = 0$

Luật nuốt 0.x = 0)

$$= xy(\bar{z}+z) + x\bar{z}$$

$$= xy + x\bar{z}$$ (Luật bù $z + \bar{z} = 1$)

Bài 9. Tìm dạng chuẩn tắc đầy đủ của biểu thức

a, $f(x,y,z) = yz + x\bar{z}$

$$= yz(x+\bar{x}) + x\bar{z}(y+\bar{y})$$

$$= xyz + \bar{x}yz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$$

b, $f(x,y,z) = x + y + x\bar{z}$

$$= x(z+\bar{z}) + y + x\bar{z}$$

$$= xz + x\bar{z} + y + x\bar{z}$$

$$= xz + x\bar{z} + y$$

$$= xz(y+\bar{y}) + x\bar{z}(y+\bar{y}) + y(xz + (\bar{x}+\bar{z}))$$
$$= xyz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xyz + \bar{x}y + y\bar{z}$$
$$= xyz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y(z+\bar{z}) + y\bar{z}(x+\bar{x})$$
$$= xyz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$
$$= xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$$

Cách khác: Giải bằng lập bảng chân trị của biểu thức

$$f(x,y,z) = x + y + x\bar{z}$$

X	Y	Z	Z’	XZ’	X+Y	X+Y+XZ’
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

Tập các thể hiện làm cho giá trị của F(x,y,z) bằng 1 là: {010, 011, 100, 101, 110, 111}. Từ tập các thể hiện này ta lập các từ tối thiểu tương ứng : $\bar{x}y\bar{z}$, $\bar{x}yz$, $x\bar{y}\bar{z}$, $x\bar{y}z$, $xy\bar{z}$, xyz . Như vậy, dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ của F như sau:

$$F(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$$

Bài 10. Tìm biểu thức tối thiểu của:

a, $E1 = xy + x\bar{y} = x(y+\bar{y}) = x.1 = x$ (Luật bù $y+\bar{y}=1$)
(Luật đồng nhất x.1=x)

b, $E2 = xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = xy + \bar{x}(y+\bar{y})$

$E2 = xy + \bar{x}.1 = xy + \bar{x} = \bar{x} + y$

(Luật hấp thụ $x + \bar{x}y = x + y$, $x + xy = x$, $x(x+y) = x$, $x(\bar{x}+y) = xy$)

c, $E4 = x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y$

$= x\overline{y} + \overline{x}(\overline{y} + y)$

$= x\overline{y} + \overline{x}$

$= \overline{x} + \overline{y}$

Bài 11. Tìm biểu thức tối thiểu của:

a, $E1 = x + yz + z\overline{x}y + \overline{y}xz$

$E1 = x(1 + \overline{y}z) + yz(1 + \overline{x})$

$E1 = x(1 + \overline{y}z) + yz(1 + \overline{x})$

$E1 = x.1 + yz.1$ (Luật nuốt 1 + x = 1)

$E1 = x + yz$ (Luật đồng nhất 1.x =x)

b, $E2 = xyz + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z$

$= xy(1 + \overline{z}) + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z$

$= xy + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}zv$

$= y(x + \overline{x}\,\overline{z}) + \overline{x}\,\overline{y}z$

$= y(x + \overline{z}) + \overline{x}\,\overline{y}z$ (Luật hấp thụ $x + \overline{x}y = x + y$)

$= xy + y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z$

c, $E3 = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z$

$= xy(z + \overline{z}) + x\overline{y}z + \overline{x}z(y + \overline{y})$

$= xy + x\overline{y}z + \overline{x}z$

$= x(y + \overline{y}z) + \overline{x}z$

$$
\begin{aligned}
&= x(y+z) + \bar{x}z \\
&= xy + xz + \bar{x}z \\
&= xy + (x+\bar{x})z \\
&= xy + z
\end{aligned}
$$

d, $E3 = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

$$
\begin{aligned}
&= xy(z+\bar{z}) + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z \\
&= xy + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z \\
&= y(x+\bar{x}\bar{z}) + \bar{x}\bar{y}z \\
&= y(x+\bar{z}) + \bar{x}\bar{y}z \\
&= xy + y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z \\
&= xy + y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z
\end{aligned}
$$

Bài 12. Tìm biểu thức tối thiểu của:

A, $E1 = w\bar{x} + wxy + \bar{w}\bar{x}\bar{y} + \bar{w}xy\bar{z}$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{x}(w+\bar{w}\bar{y}) + xy(w+\bar{w}\bar{z}) \\
&= \bar{x}(w+\bar{y}) + xy(w+\bar{z}) \\
&= \bar{x}w + \bar{x}\bar{y} + xyw + xy\bar{z} \\
&= w(\bar{x}+xy) + \bar{x}\bar{y} + xy\bar{z} \\
&= w(\bar{x}+y) + \bar{x}\bar{y} + xy\bar{z} \\
&= \bar{x}w + yw + \bar{x}\bar{y} + xy\bar{z}
\end{aligned}
$$

b, $$E2 = wxyz + wxy\bar{z} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$$

$$= wxy(z+\bar{z}) + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$$

$$= wxy + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$$

Bài 13. ***Cho bảng giá trị***

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

a. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc hoàn toàn (đầy đủ) của f.

Tập các thể hiện làm cho giá trị của F(x,y,z) bằng 1 là: {000, 010, 100, 110, 111}. Từ tập các thể hiện này ta lập các từ tối thiểu tương ứng : $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, $\bar{x}y\bar{z}$, $x\bar{y}\bar{z}$, $xy\bar{z}$, xyz. Như vậy, dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ của F như sau:

$$F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

b. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f bằng bảng Karnaugh.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	**1**	**1**	**1**	
$\bar{x}$		**1**	**1**	

$$F(x,y,z) = xy + \bar{z}$$

Bài 14. *(Đề thi cao học ĐH CNTT TP HCM-2010)*

a. Tìm công thức dạng chính tắc và công thức tối thiểu của hàm Boole sau:

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}y\bar{z}t + xz + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + y\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z}\bar{t} + xy\bar{t} + xyzt$$

$$= \bar{x}y\bar{z}t + xz(y+\bar{y}) + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + y\bar{z}t(x+\bar{x}) + x\bar{y}\bar{z}(t+\bar{t}) + \bar{x}\bar{z}\bar{t}(y+\bar{y}) + xy\bar{t}(\bar{z}+z) + xyzt$$

$$= \bar{x}y\bar{z}t + xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}t + \bar{x}y\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xyz\bar{t} + xyzt$$

$$= \bar{x}y\bar{z}t + xyz(t+\bar{t}) + x\bar{y}z(t+\bar{t}) + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xyz\bar{t} + xyzt$$

$$= \bar{x}y\bar{z}t + xyzt + xyz\bar{t} + x\bar{y}zt + x\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xyz\bar{t} + xyzt$$

$$= \bar{x}y\bar{z}t + xyzt + x\bar{y}zt + x\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xyz\bar{t}$$

Công thức dạng chính tắc đầy đủ là**:**

$$F(x,y,z,t) = \bar{x}y\bar{z}t + xyzt + x\bar{y}zt + x\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xyz\bar{t}$$

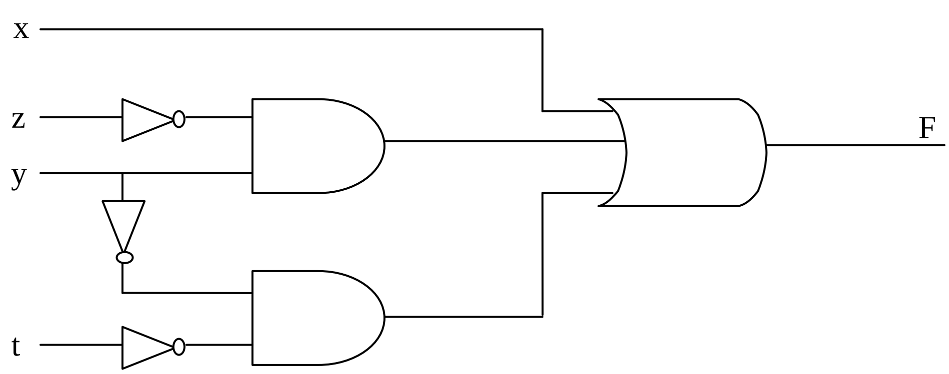
Ta dùng bảng Karnaugh để rút gọn hàm F(x,y,z,t) như sau:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
tx	**1**	**1**	**1**	**1**
$t\bar{x}$		**1**		
$\bar{t}\bar{x}$		**1**	**1**	**1**
$\bar{t}x$	**1**	**1**	**1**	**1**

Vậy hàm tối thiểu : $F(x,y,z,t) = x + y\bar{z} + \bar{y}\bar{t}$

b. Vẽ sơ đồ mạng các cổng logic tương ứng với f(x,y,z,t) dựa trên một công thức đa tối thiểu hóa của hàm Boole f

Ta có: $F(x,y,z,t) = x + y\bar{z} + \bar{y}\bar{t}$



Bài 15. ***a. Tìm triển khai tổng các tích của hàm Boole f(x,y,z), biết rằng f(x,y,z)=1 nếu và chỉ nếu x.y = 1.***

Xét bảng giá trị x,y,z có $2^3 = 8$ trường hợp như bảng sau:

x	y	z
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Để hàm f(x,y,z) = 1 khi x.y=1 thì :

x = 1, y = 1 và z = 1
x = 1, y = 1 và $\overline{z} = 1$

Vậy: xyz và $xy\overline{z}$ là các nguyên nhân nguyên tố của hàm F(x,y,z) thỏa mãn yêu cầu. Dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ của hàm F(x,y,z) như sau:

$$F(x,y,z) = xyz + xy\overline{z}$$

Hàm này được rút gọn lại:

$$F(x,y,z) = xyz + xy\overline{z} = xy(z+\overline{z}) = xy.1 = xy$$

b. Tìm triển khai tổng các tích của hàm Boole f(x,y,z), biết rằng f(x,y,z)=1 nếu và chỉ nếu x+y = 0.

Theo bảng giá trị trên. Để hàm f(x,y,z) = 1 khi x + y = 0 thì :

$\overline{x} = 1,\ \overline{y} = 1$ và $z = 1$

$\overline{x} = 1,\ \overline{y} = 1$ và $\overline{z} = 1$

Vậy: $\overline{x}\overline{y}z, \overline{x}\overline{y}\overline{z}$ là các nguyên nhân nguyên tố của hàm F(x,y,z) thỏa mãn yêu cầu. Dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ của hàm F(x,y,z) như sau:

$$F(x,y,z) = \overline{x}\overline{y}z + \overline{x}\overline{y}\overline{z}$$

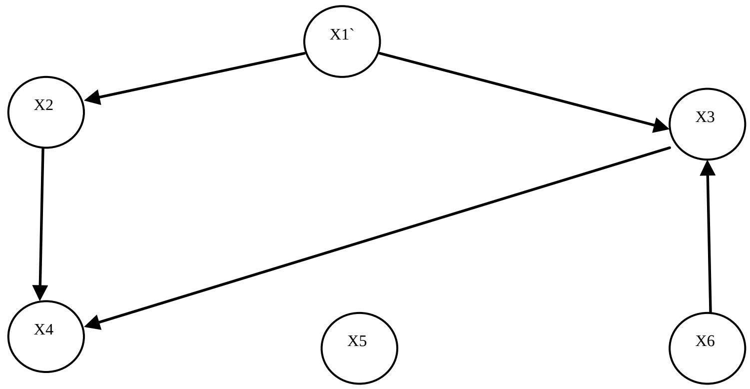
Hàm này được rút gọn lại:

$$F(x,y,z) = \overline{x}\overline{y}z + \overline{x}\overline{y}\overline{z} = \overline{x}\overline{y}(z+\overline{z}) = \overline{x}\overline{y}.1 = \overline{x}\overline{y}$$

Đồ thị và cây

Bài 1. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng – 2/2009)*

Cho đồ thị



a. Biểu diễn đồ thị trên bằng ma trận kề

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	0	1	1	∞	∞	∞
X2	∞	0	∞	1	∞	∞
X3	∞	∞	0	1	∞	∞
X4	∞	∞	∞	0	∞	∞
X5	∞	∞	∞	∞	0	∞
X6	∞	∞	1	∞	∞	0

b. Bậc vào của đỉnh X3

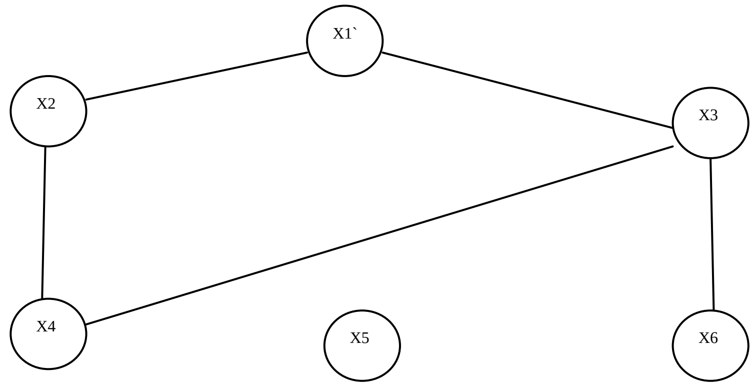
Đỉnh X3 có 2 cung đi vào, nên bậc của nó là: $deg^{+}(x3) = 2$

Bậc ra của đỉnh x6:
Đỉnh X6 có 1 cung đi ra, nên bậc của nó là: $deg^{-}(x6) = 1$

c. G có phải là đồ thị liên thông không ? Vì sao?

Không liên thông vì trong G có 1 đỉnh cô lập là x5

d. ***Tìm ổn định ngoài β(G)***



Ta có tập đỉnh V={x1, x2, x3, x4, x5, x6}

Xác định ánh xạ Δ

Δ(x1) ={x1, x2, x3}

Δ(x2) ={x1, x2, x4}

Δ(x3) ={x1, x3, x4, x6}

Δ(x4) ={x2, x3, x4}

Δ(x5) ={x5}

Δ(x6) ={x3, x6}

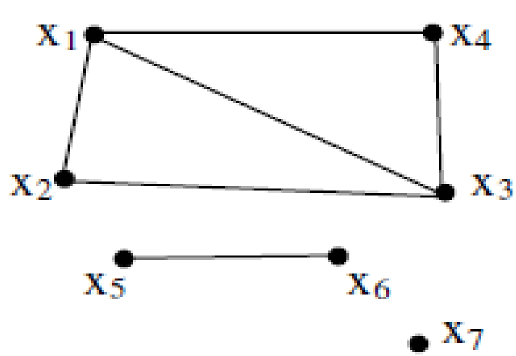
Từ các tập $\Delta(x_i)$ trên ta có:

Δ(x2) ∪ Δ(x5) ∪ Δ(x6) ={x1, x2, x4} ∪ {x5} ∪ {x3, x6} = V
Δ(x3) ∪ Δ(x4) ∪ Δ(x5) ={x1, x3, x4, x6} ∪ {x2, x3, x4} ∪ {x5} = V

Vậy có 2 tập : B1 = {x2, x5, x6} và B2 = {x3, x4, x5}

Là các tập ổn định ngoài có số phần tử ít nhất. Từ đó ta có số ổn định ngoài β(G)=3

Bài 2. ***Cho đồ thị***



a. Biểu diễn đồ thị trên bằng ma trận kề

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
X1	0	1	1	1	∞	∞	∞
X2	1	0	1	∞	∞	∞	∞
X3	1	1	0	1	∞	∞	∞
X4	1	∞	1	0	∞	∞	∞
X5	∞	∞	∞	∞	0	1	∞
X6	∞	∞	∞	∞	1	0	∞
X7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

b. Tìm số ổn định trong của đồ thị

Tập các ổn định trong 2 phần tử

A1={x1, x5} A2={x1, x6} A3={x1, x7} A4={x2, x5}

A5={x2, x6} A6={x2, x7} A7={x3, x5} A8={x3, x6}

A9={x3, x7} A10={x4, x5} A11={x4,x6} A12={x4, x7}

…

Tập các ổn định trong 3 phần tử

A13={x1, x5, x7} A14={x1, x6, x7}

A15={x3, x5, x7} A16={x3, x6, x7}

Tập các ổn định trong 4 phần tử A10 = {x2, x4, x5, x7}; A11 = {x2, x4, x6, x7}

Và không có tập ổn định trong có trên 4 phần tử. Vậy số ổn định trong là $\alpha(G) = 4$.

c. Tìm số ổn định ngoài của đồ thị

Ta có tập đỉnh V={x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}

Xác định ánh xạ Δ

Δ(x1) ={x1, x2, x3, x4}

Δ(x2) ={x1, x2, x3}

Δ(x3) ={x1, x2, x3, x4}

$\Delta(x4) = \{x1, x3, x4\}$

$\Delta(x5) = \{x5, x6\}$

$\Delta(x6) = \{x5, x6\}$

$\Delta(x7) = \{x7\}$

Từ các tập $\Delta(x_i)$ trên ta có:

$\Delta(x1) \cup \Delta(x5) \cup \Delta(x7) = V$ $\quad$ $\Delta(x1) \cup \Delta(x6) \cup \Delta(x7) = V$

$\Delta(x3) \cup \Delta(x5) \cup \Delta(x7) = V$ $\quad$ $\Delta(x3) \cup \Delta(x6) \cup \Delta(x7) = V$

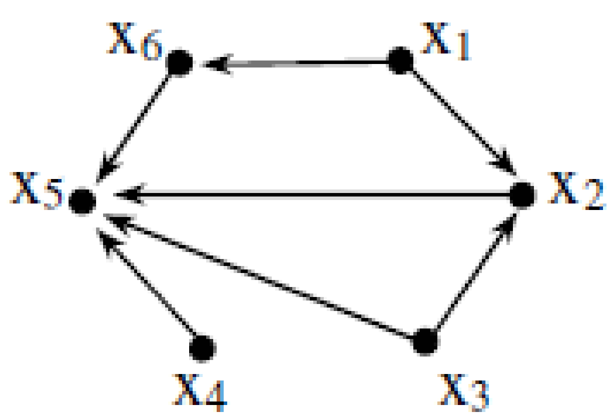
Vậy ta có 4 tập : B1 = {x1, x5, x7} ; B2 = {x1, x6, x7}
B3 = {x3, x5, x7} ; B4 = {x3, x6, x7}

Là các tập ổn định ngoài có số phần tử ít nhất. Từ đó ta có số ổn định ngoài $\beta(G)=3$

d. Tìm nhân của đồ thị

Các tập : {x1, x5, x7} {x1, x6, x7} {x3, x5, x7} {x3, x6, x7} vừa là các tập ổn định trong vừa là các tập ổn định ngoài, nên nhân của đồ thị là: :
{x1, x5, x7} {x1, x6, x7} {x3, x5, x7} {x3, x6, x7}

Bài 3. ***Cho đồ thị***



a. Biểu diễn đồ thị trên bằng ma trận kề

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	0	1	∞	∞	∞	1
X2	∞	0	∞	∞	1	∞
X3	∞	1	0	∞	1	∞
X4	∞	∞	∞	0	1	∞
X5	∞	∞	∞	∞	0	∞
X6	∞	∞	∞	∞	1	0

b. Tìm số ổn định ngoài của đồ thị

Ta có tập đỉnh V = {x1, x2, x3, x4, x5, x6}

Xác định ánh xạ Δ

Δ(x1) ={x1}

Δ(x2) ={x1, x2, x3}

Δ(x3) ={ x3}

Δ(x4) ={x4}

Δ(x5) ={x2, x3, x4, x5, x6}

Δ(x6) ={x1, x6}

Từ các tập Δ(xi) trên ta có:

Δ(x1) U Δ(x5) = V   Δ(x2) U Δ(x5) = V   Δ(x5) U Δ(x6) = V

Vậy các tập ổn định ngoài có số phần tử ít nhất là :

B1= {x1, x5}   B2={x2, x5} B3={x5, x6}

Từ đó ta có số ổn định ngoài β(G)=2

c. Số ổn định trong

A1={x1, x3, x4}   A2={x2, x4, x6}   A3={x3, x4, x6}

Và không có tập ổn định trong có trên 3 phần tử. Vậy số ổn định trong là α(G) = 3.

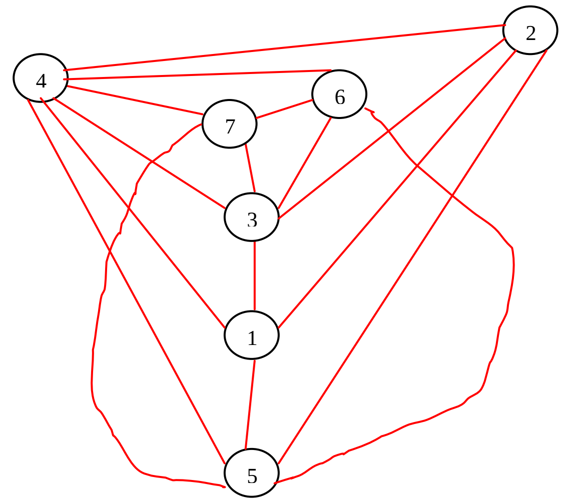
d. Nhân của đồ thị

Tập B1= {x1, x5} vừa là ổn định ngoài, vừa là ổn định trong nên B1 là nhân của đồ thị.

Bài 4. ***Hãy xét xem các đồ thị cho bằng ma trận kề sau, đồ thị nào là đồ thị Euler hoặc nữa Euler và tìm chu trình Euler hoặc đường đi Euler (nếu có)***

a. Vô hướng

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Ta có bậc của các đỉnh như sau:

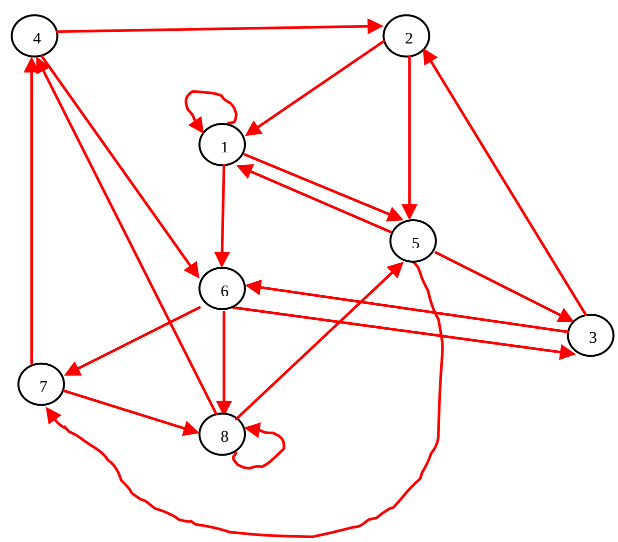
Deg(x1) = 4, Deg(x2) = 4, Deg(x3) = 5, Deg(x4) = 6

Deg(x5) = 5, Deg(x6) = 4, Deg(x7) = 4

Đồ thị có 2 đỉnh bậc lẻ đó là đỉnh X3 và X5, các đỉnh còn lại bậc chẵn. Vì vậy, đồ thị trên là đồ thị bán Euler.

b. Có hướng

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



Ta có bậc của đồ thị:

$Deg^-(1) = Deg^+(1) = 3$; $Deg^-(2) = Deg^+(2) = 2$; $Deg^-(3) = Deg^+(3) = 2$;

$Deg^-(4) = Deg^+(4) = 2$; $Deg^-(5) = Deg^+(5) = 3$; $Deg^-(6) = Deg^+(6) = 3$;

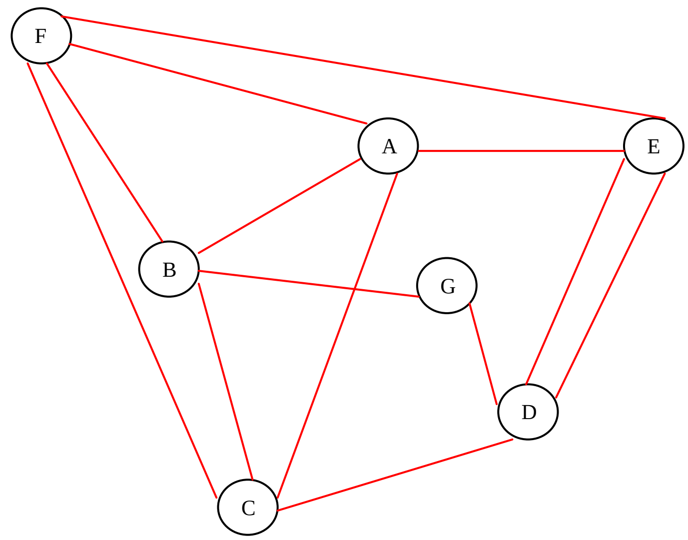
$Deg^-(7) = Deg^+(7)=2$; $Deg^-(8) = Deg^+(8)= 3$;

Đồ thị trên là đồ thị có hướng liên thông và tất cả các đỉnh của đồ thị có bậc vào (trong) bằng bậc ra (ngoài). Vậy, đồ thị đã cho là đồ thị Euler.

Chu trình Euler: $1 \to 6 \to 7 \to 8 \to 4 \to 6 \to 8 \to 8 \to 5 \to 1 \to 5 \to 3 \to 6 \to 3 \to 2 \to 5 \to 7 \to 4 \to 2 \to 1 \to 1$.

c. ***Vô hướng***

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



Ta có bậc của các đỉnh như sau:

Deg(A) = 4, Deg(B) = 4, Deg(C) = 4, Deg(D) = 4

Deg(E) = 4, Deg(F) = 4, Deg(G) = 2

Bậc của tất cả các đỉnh đều là số chẵn. Vì vậy, đồ thị đã cho là đồ thị Euler.

Chu trình Euler là: $A \to B \to C \to A \to E \to D \to G \to B \to F \to C \to D \to E \to F \to A$

Bài 5.

a. ***Một đơn đồ thị liên thông có 10 mặt, tất cả các đỉnh đều có bậc bằng 4, tìm số đỉnh của đồ thị.***

Gọi f là số miền của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của đồ thị,

e là số cạnh và v là số đỉnh của đồ thị

Ta có tổng bậc của đồ thị bằng 2 lần số cạnh, tức là : $2e = 4v \Rightarrow e=2v$

Mặt khác, ta có : $f = e - v + 2 \Leftrightarrow 10 = 2v - v + 2 \Rightarrow v=8$

Vậy đồ thị có 8 đỉnh và 16 cạnh.

b. *Một đơn đồ thị phẳng liên thông có 9 đỉnh, bậc của các đỉnh là 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Tìm số cạnh và số mặt của đồ thị.*

Tổng bậc của đồ thị là : $2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 28$.

Số cạnh của đồ thị là : $e = 28/2 = 14$ cạnh

Số mặt của đồ thị là : $f = e - v + 2 = 14 - 9 + 2 = 7$ mặt

Bài 6. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng – 8/2009)*

a. *Trình bày thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất*

Các bước của thuật toán tìm cây phủ nhỏ nhất T của đồ thị liên thông có trọng số như sau:

Bước 1: Đặt $T = \varnothing$ (T rỗng không có cạnh)

Sắp xếp các cạnh của đồ thị theo thứ tự trọng số tăng dần vào tập Z

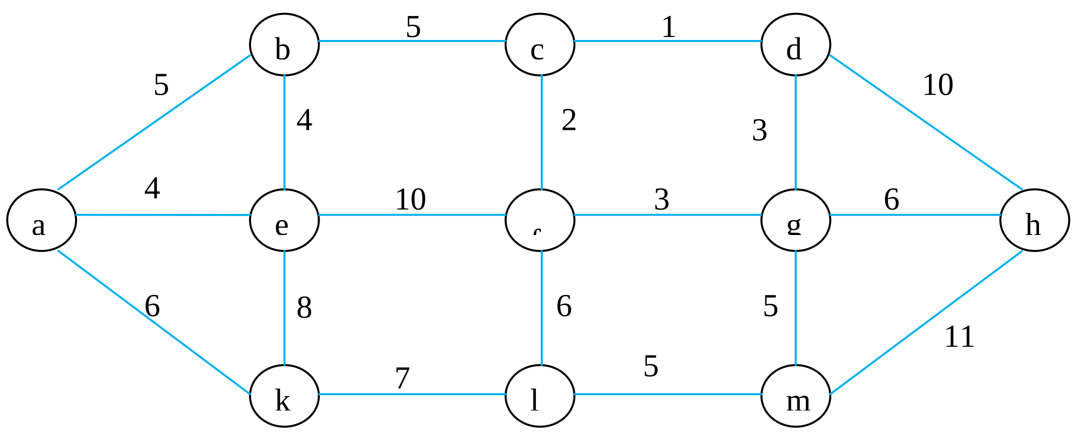
Bước 2: Trong khi ($|T| < n-1$) và $Z \neq \varnothing$) thực hiện:

- Tìm cạnh e có trọng số nhỏ nhất trong tập Z.

  $Z = Z \setminus \{e\}$

- Nếu $T \cup \{e\}$ không tạo chu trình thì $T = T \cup \{e\}$

b. *Áp dụng thuật toán Kruskal xác định cây khung nhỏ nhất của đồ thị với trọng số như hình vẽ:*

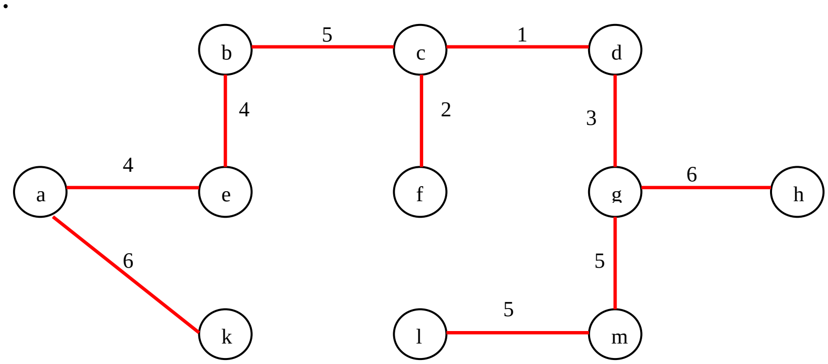


$T = \varnothing$, $n=11$. Sắp xếp các cạnh của đồ thị theo thứ tự trọng số tăng dần như sau:

Cạnh	c,d	c,f	d,g	f,g	a,e	b,e	a,b	b,c	g,m	m,l	a,k	f,l	g,h	k,l	e,k	d,h	e,f	h,m
Độ dài	1	2	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	8	10	10	11

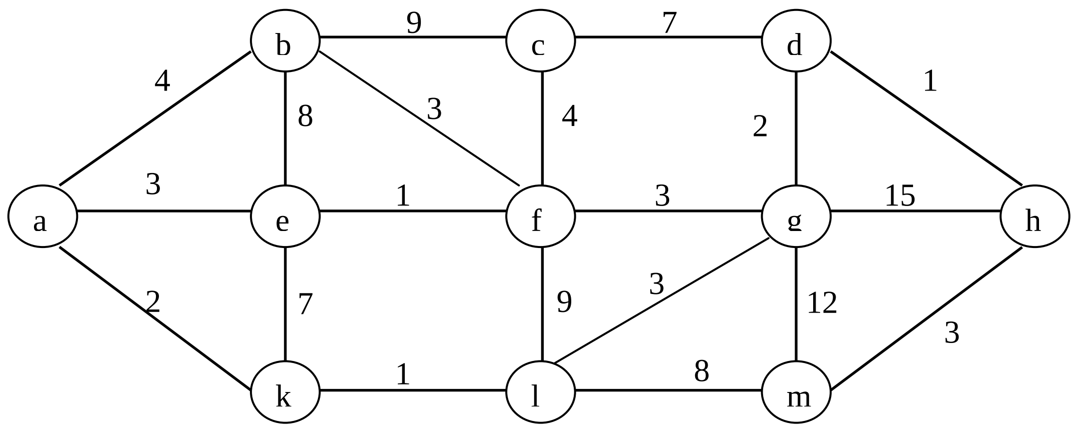
Bước lặp	Cạnh được chọn và đưa vào T	Trọng số
1	C,D	1
2	C,F	2
3	D,G	3
4	Không chọn cạnh (F,G), vì tạo chu trình	
5	A,E	4
6	B,E	4
7	Không chọn cạnh (A,B), vì tạo chu trình	
8	B,C	5
9	G,M	5
10	L,M	5
11	A,K	6
12	Không chọn cạnh (F,L), vì tạo chu trình	
13	G,H	6
	Tổng trọng số:	41

Tập cạnh của cây khung nhỏ nhất cần tìm là T = {(C,D), (C,F), (D,G), (A,E), (B,E), (B,C), (G,M), (L,M), (A,K), (G,H)}, có tổng trọng số là: 41. Cây khung này như hình dưới :



Bài 7. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng – 9/2010)*

Cho đồ thị có trọng số G như hình vẽ

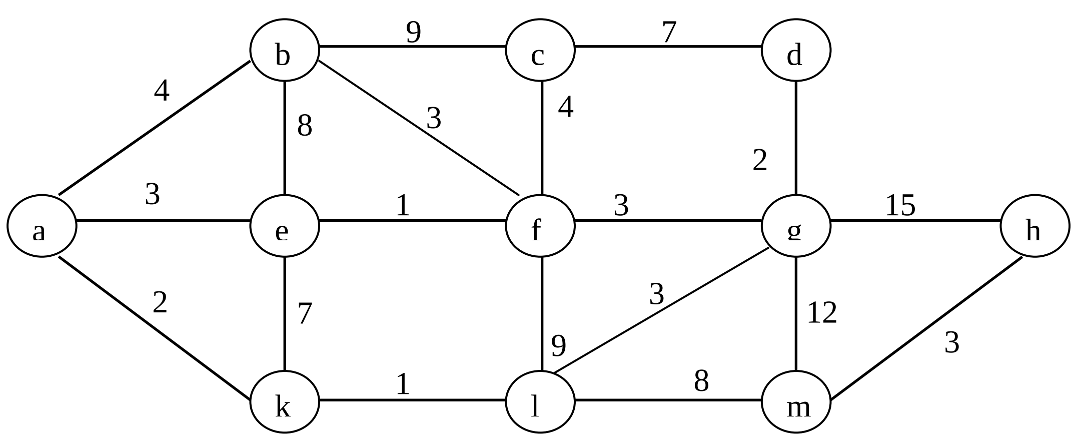


a. *Đồ thị G có phải là đồ thị Euler không? Nếu có thì hãy chỉ ra chu trình Euler? Nếu không hãy giải thích vì sao?*

Để một đồ thị vô hướng là đồ thị Euler thì bậc của các đỉnh của đồ thị đều chẵn. Nhưng bậc của các đỉnh a, c, d, k, h, m của đồ thị là số lẻ (deg(a) = 3, deg(c) =3, deg(d)=3, deg(k)=3, deg(m)=3, deg(h)=3). Vậy đồ thị G không phải là đồ thị Euler.

b. *Hãy sử dụng thuật toán Kruskal tìm cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị G có chứa cạnh bc nhưng không chứa cạnh dh.*

Cây bao trùm nhỏ nhất không chứa cạnh dh của đồ thị G, ta loại cạnh dh ra khỏi đồ thị, lúc này ta có đồ thị G’ với tập cạnh E’=E\{dh} như sau:

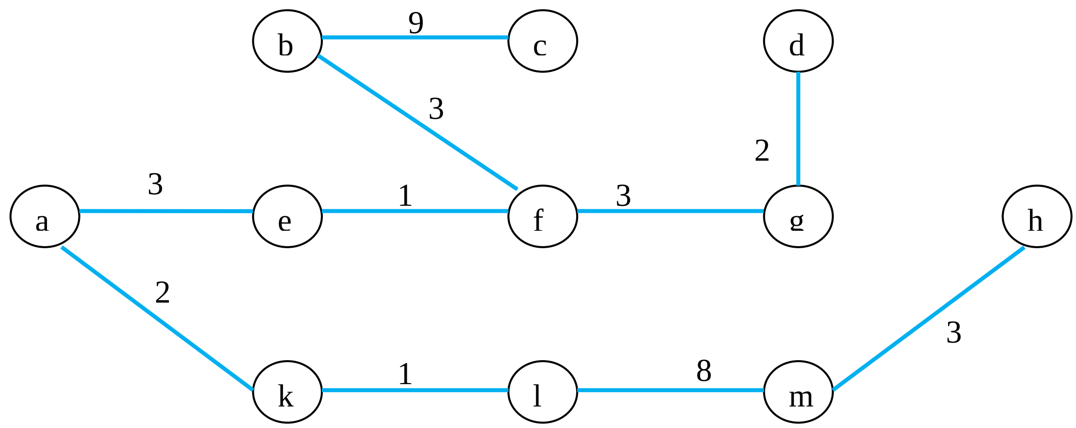


Khởi tạo T:= {(b,c)}.

Sắp xếp các cạnh của đồ thị theo thứ tự trọng số tăng dần trừ cạnh bc, ta có: Z={(e,f), (k,l), (a,k), (d,g), (a,e), (b,f), (f,g), (h,m), (g,l), (a,b), (c,f), (c,d), (e,k), (b,c), (l,m), (f,l), (g,m), (h,g) }.

Bước lặp	Cạnh được chọn và đưa vào T	Trọng số
1	E,F	1
2	K,L	1
3	A,K	2
4	D,G	2
5	A,E	3
6	B,F	3
7	F,G	3
8	H,M	3
9	Không chọn cạnh (G,L), vì tạo chu trình	
10	Không chọn cạnh (A,B), vì tạo chu trình	
11	Không chọn cạnh (C,F), vì tạo chu trình	
12	Không chọn cạnh (C,D), vì tạo chu trình	
13	Không chọn cạnh (E,K), vì tạo chu trình	
14	Không chọn cạnh (B,C), vì tạo chu trình	
15	(L,M)	8

Tập cạnh của cây khung nhỏ nhất cần tìm là T={(B,C), (E,F), (K,L), (A,K), (D,G), (A,E), (B,F), (F,G), (H,M), (L,M)}, trọng số nhỏ nhất bằng : 35. Cây khung được vẽ như sau:



Bài 8.

a. ***Trình bày thuật toán Prim***

Các bước chính của thuật toán Prim tìm cây phủ nhỏ nhất T của đồ thị liên thông có trọng số G được mô tả như sau:

Bước 1 : T := {v} v là đỉnh bất kỳ.

Bước 2 : Lặp n-1 lần

- Tìm đỉnh rìa v có cạnh e nối T với trọng số nhỏ nhất
- Đưa e vào T

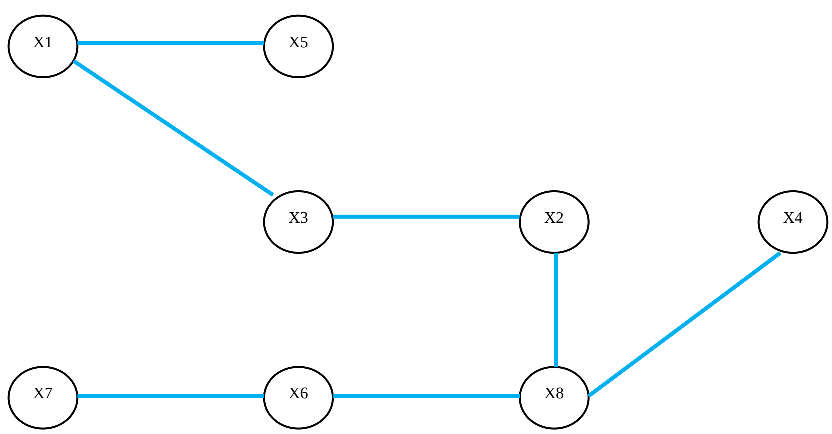
b. ***Dùng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị có ma trận trọng số sau:***

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
. & 16 & 15 & 23 & 19 & 18 & 32 & 20 \\
16 & . & 13 & 33 & 24 & 20 & 19 & 11 \\
15 & 13 & . & 13 & 29 & 21 & 20 & 19 \\
23 & 33 & 13 & . & 22 & 30 & 21 & 12 \\
19 & 24 & 29 & 22 & . & 34 & 23 & 21 \\
18 & 20 & 21 & 30 & 34 & . & 17 & 14 \\
32 & 19 & 20 & 21 & 23 & 17 & . & 18 \\
20 & 11 & 19 & 12 & 21 & 14 & 18 & .
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Tv	Te
Khởi tạo	-	(16,x1)	(15,x1)*	(23,x1)	(19,x1)	(18,x1)	(32,x1)	(20,x1)	X1	∅
1	-	(13,X3)*	-	(13,X3)	(19,x1)	(18,x1)	(20,X3)	(19,X3)	X1, X3	X1X3

2	-	-	-	(13,X3)	(19,x1)	(18,x1)	(19,X2)	(11,X2) *	X1, X3, X2	X1X3, X3X2
3	-	-	-	(12,X8)*	(19,x1)	(14,x8)	(18,X8)	-	X1, X3, X2, X8	X1X3, X3X2, X2X8
4	-	-	-	-	(19,x1)	(14,x8)*	(18,X8)	-	X1, X3, X2, X8, X4	X1X3, X3X2, X2X8, X8X4
5	-	-	-	-	(19,x1)	-	(17,x6)*	-	X1, X3, X2, X8, X4, X6	X1X3, X3X2, X2X8, X8X4, x8x6
6	-	-	-	-	(19,x1) *	-	-	-	X1, X3, X2, X8, X4, X6, X7	X1X3, X3X2, X2X8, X8X4, x8x6, x6x7
7									X1, X3, X2, X8, X4, X6, X7, X5	X1X3, X3X2, X2X8, X8X4, x8x6, x6x7, x1x5

Tập cạnh của cây khung nhỏ nhất cần tìm là T={(X1,X3), (X3,X2), (X2,X8), (X8,X4), (X8,X6), (X6,X7), (X1,X5)} trọng số nhỏ nhất bằng : 13+15+12+19+14+17+11 = 101. Cây khung được vẽ như sau:



Bài 9.

a. *Trình bày thuật toán Dijkstra*

Các bước chính của thuật Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z trên đồ thị G=(V,E,W) được mô tả như sau:

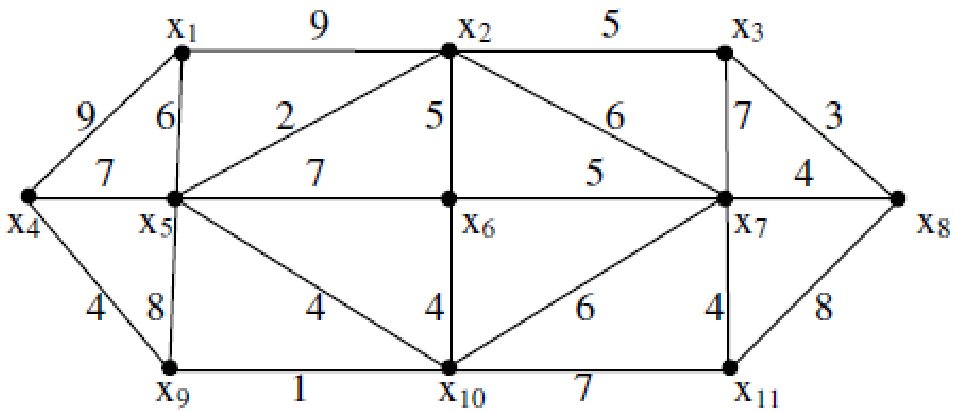
Bước 1 : T=V; $D_a = 0$; $D_i = \infty$, $V_i \neq a$.

Bước 2 : Lặp cho đến khi $z \notin T$:

- Lấy ra khỏi T đỉnh V_i có Di nhỏ nhất
- Đánh nhãn lại cho mọi V_j kề V_i và $V_j \in T$ theo công thức:

  $D_j = \min\{D_j, D_i+W_{ij}\}$

b. *Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị vô hướng*

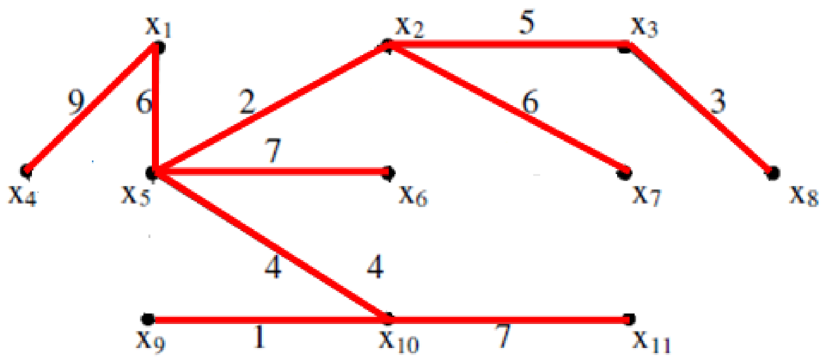


B.lặp	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11
Khởi tạo	**0, x1***	∞,x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞,x1
1	-	9, x1	∞, x1	9, x1	**6, x1***	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1
2	-	**8,x5***	∞, x1	9, x1	-	13, x5	∞, x1	∞, x1	14,x5	10,x5	∞, x1
3	-	-	13,x2	**9, x1***	-	13, x5Ux2	14,x2	∞, x1	14,x5	10,x5	∞, x1
4	-	-	13,x2	-	-	13, x5Ux2	14,x2	∞, x1	13,x4	**10,x5***	∞, x1
5	-	-	13,x2*	-	-	13, x5Ux2	14,x2	∞, x1	**11,x10**	-	17,x10
6	-	-	**13,x2***	-	-	13, x5Ux2	14,x2	16,x3	-	-	17,x10
7	-	-	-	-	-	13, x5Ux2	14,x2	16,x3	-	-	17,x10
8	-	-	-	-	-	-	**14,x2**	16,x3	-	-	17,x10
9	-	-	-	-	-	-	-	**16,x3**	-	-	17,x10
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**17,x10**

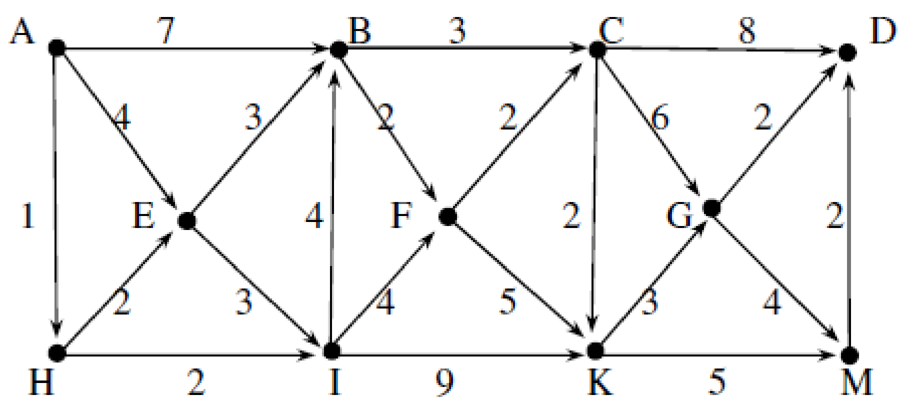
Từ bảng trên ta có đường đi ngắn nhất từ x1 đến các đỉnh là:

X1X5X2 (độ dài 8); X1X4 (9); X1X5X2X3 (13); X1X5 (6)
X1X5X6 (13); X1X5X2X7 (14); X1X5X2X3X8 (16)
X1X5X10X9 (11); X1X5X10 (10); X1X5X10X11 (17)

Các đường đi được minh họa trên đồ thị sau:



c. *Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến các đỉnh còn lại của đồ thị có hướng*

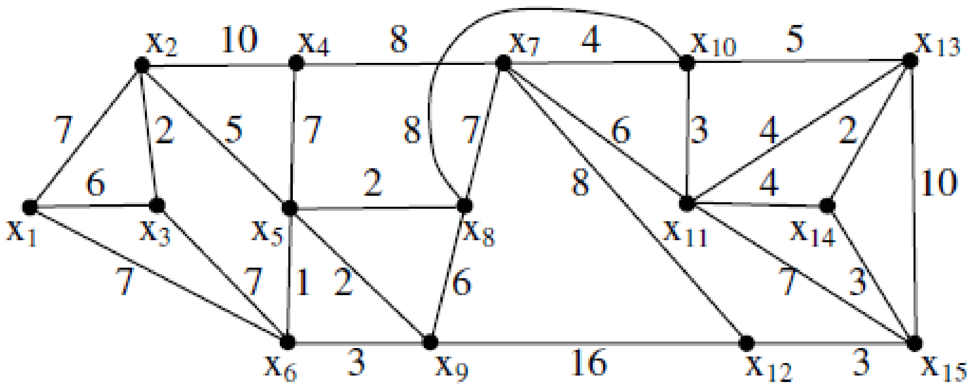


B.lặp	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	M
Khởi tạo	**0, A***	∞,x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞, x1	∞,x1
1	-	7, A	∞, A	∞, A	4,A	∞, A	∞, A	**1, A***	∞, A	∞, A	∞, A
2	-	7, A	∞, A	∞, A	**3,H***	∞, A	∞, A	-	3,H	∞, A	∞, A
3	-	6, E	∞, A	∞, A	-	∞, A	∞, A	-	**3,H***	∞, A	∞, A
4	-	**6, E***	∞, A	∞, A	-	7,I	∞, A	-	-	12,I	∞, A
5	-	-	9,B	∞, A	-	**7,I***	∞, A	-	-	12,I	∞, A
6	-	-	**9,B ∪F***	∞, A	-	-	∞, A	-	-	12,I	∞, A
7	-	-	-	17,C	-	-	15,C	-	-	**11,C***	∞, A
8	-	-	-	17,C	-	-	**14,K***	-	-	-	16,K
9	-	-	-	**16,G***	-	-	-	**-**	**-**	-	16,K
10	-	-	-	-	-	-	-	**-**	**-**	-	**16,K***

Từ bảng trên, ta có đường đi ngắn nhất từ A đến các đỉnh là:

AHEB (6);	AHIFC (9);	AHIFKGD (16);	AHE (3)
AFHIF (7);	AHIFCKG (14);	AH (1);	AHI (3);
AHIFCK (11);	AHIFCKM (16)		

Bài 10. ***Cho đồ thị***



a. Tìm đường đi ngắn nhất từ x1 đến x14

B.lặp	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15
Khởi tạo	**X1**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	-	7,x1	**6,x1**	∞	∞	7,x1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	-	**7,x1**	-	∞	∞	7,x1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	-	-	-	17,x2	12,x2	**7,x1**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	-	-	-	17,x2	**8,x6**	-	∞	∞	10,x6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	-	-	-	15,x5	-	-	∞	**10,x5**	10,x6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	-	-	-	15,x5	-	-	17,x8	-	**10,x6**	18,x8	∞	∞	∞	∞	∞
7	-	-	-	**15,x5**	-	-	17,x8	-	-	18,x8	∞	26,x9	∞	∞	∞
8	-	-	-	-	-	-	**17,x8**	-	-	18,x8	∞	26,x9	∞	∞	∞
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**18,x8**	23,x7	25,x7	∞	∞	∞
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**21,x10**	25,x7	23,x10	∞	∞
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25,x7	**23,x10**	25,x11	28,x11
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25,x7	-	**25,x11 U x13**	28,x11

Từ bảng trên ta có đường đi ngắn nhất từ x1 đến x14 là: $X_1X_6X_5X_8X_{10}X_{13}X_{14}$ hoặc $X_1X_6X_5X_8X_{10}X_{11}X_{14}$ và độ dài là: 25.

b. *Tìm đường đi ngắn nhất từ x1 đến x14 có chứa X_8X_9*

B.lặp	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15
Khởi tạo	**X1**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	-	7,x1	**6,x1**	∞	∞	7,x1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	-	**7,x1**	-	∞	∞	7,x1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	-	-	-	17,x2	12,x2	**7,x1**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	-	-	-	17,x2	**8,x6**	-	∞	∞	10,x6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	-	-	-	15,x5	-	-	∞	**10,x5**	10, x6 U x5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	-	-	-		-	-	∞	-	**10, x6 U x5**	∞	∞	∞	∞	∞	∞
7	-	-	-		-	-	**23, x9x8**	-	-	24, x9x8		32, x8x9	∞	∞	∞
8	-	-	-		-	-	-	-	-	**24, x9x8**	29,x7	31,x7	∞	∞	35,x12
9	-	-	-		-	-	-	-	-	-	**27,x10**	31,x7	29,x10	∞	35,x12
10	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	31,x7	**29,x10**	31, x11	34, x11
11	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	31,x7	-	**31, x10 U x13**	34, x11

Từ bảng trên ta có đường đi ngắn nhất từ x1 đến x14 có chứa X8X9 là:
x1x6x5x9x8x10x11x14 , hoặc x1x6x5x9x8x10x13x14 ,
hoặc x1x6x9x8x10x11x14 , hoặc x1x6x9x8x10x13x14 với chiều dài là: 31

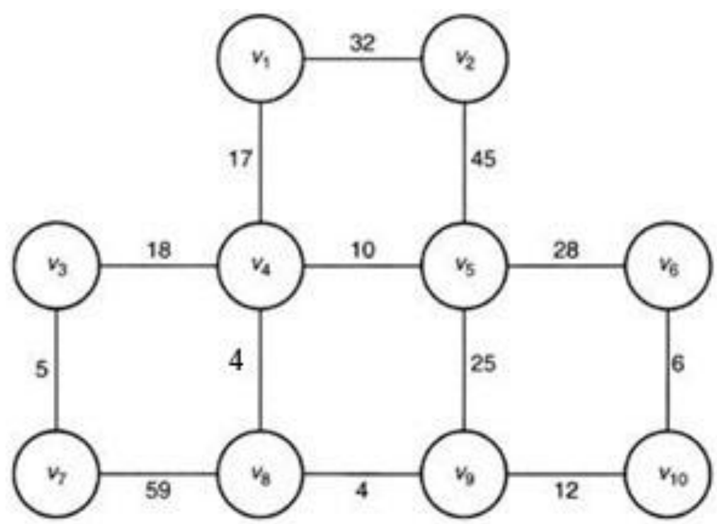
c. *Tìm đường đi ngắn nhất từ x1 đến x14 có chứa đỉnh X7*

B.lặp	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15
Khởi tạo	**X1**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	-	7,x1	**6,x1**	∞	∞	7,x1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	-	**7,x1**	-	∞	∞	7,x1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	-	-	-	17,x2	12,x2	**7,x1**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	-	-	-	17,x2	**8,x6**	-	∞	∞	10,x6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

5	-	-	-	15,x5	-	-	∞	**10,x5**	10,x6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	-	-	-	15,x5	-	-	17,x8	-	**10,x6**	18,x8	∞	∞	∞	∞	∞
7	-	-	-	**15,x5**	-	-	17,x8	-	-	18,x8	∞	26,x9	∞	∞	∞
8	-	-	-	-	-	-	**17,x8**	-	-	18,x8	∞	26,x9	∞	∞	∞
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**21,x7**	23,x7	25,x7	∞	∞	∞
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**23,x7**	25,x7	26,x10	∞	∞
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**25,x7**	26,x10	27,x11	30,x11
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**26,x10**	27,x11	28,x12
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**27,x11**	28,x12

Vậy đường đi ngắn nhất từ x1 đến x14 có chứa đỉnh X7 là:
$X_1 \rightarrow X6 \rightarrow X5 \rightarrow X8 \rightarrow X7 \rightarrow X11 \rightarrow X14$, và độ dài đường đi bằng: 27

Bài 11. ***Cho đồ thị G=(V,E,W)***



a. Tìm đường đi ngắn nhất từ V1 đến các đỉnh của đồ thị.

B.lặp	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10
Khởi tạo	**V1**	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞
1	-	32,v1	V1,∞	**17,v1**	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞	V1,∞
2	-	32,v1	35,v4	-	27,v4	V1,∞	V1,∞	**21,v4**	V1,∞	V1,∞

3	-	32,v1	35,v4	-	27,v4	V1,∞	80,v8	-	**25,v8**	V1,∞
4	-	32,v1	35,v4	-	**27,v4**	V1,∞	80,v8	-	-	37,v9
5	-	**32,v1**	35,v4	-	-	55,v5	80,v8	-	-	37,v9
6	-	-	**35,v4**	-	-	55,v5	80,v8	-	-	37,v9
7	-	-	-	-	-	55,v5	**40,v3**	-	-	37,v9
8	-	-	-	-	-	55,v5	-	-	-	**37,v9**
9	-	-	-	-	-	**43,v10**	-	-	-	-

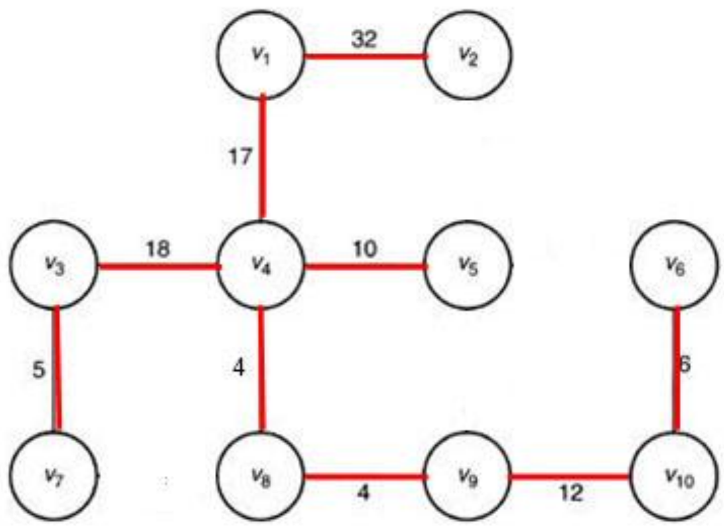
b. Tìm cây phủ nhỏ nhất của G.

Sắp xếp các cạnh của đồ thị theo thứ tự trọng số tăng dần, như sau:

(v4,v8), (v8,v9), (v3,v7), (v6,v10), (v4,v5), (v9,v10), (v1,v4), (v3,v4), (v5,v9), (v5,v6), (v1,v2), (v2,v5), (v7,v8).

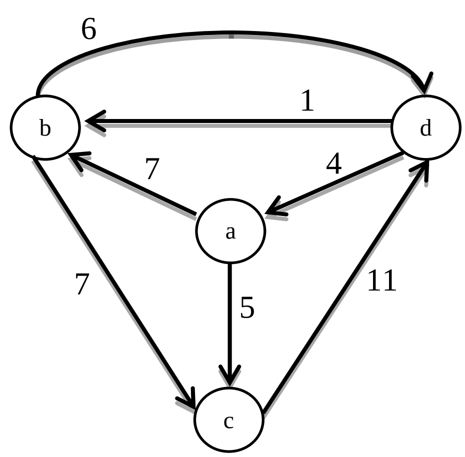
Trọng số tương ứng: 4, 4, 5, 6, 10, 12, 17, 18, 25, 28, 32, 45, 59.

Bước lặp	Cạnh được chọn và đưa vào T	Trọng số
1	(v4,v8)	4
2	(v8,v9)	4
3	(v3,v7)	5
4	(v6,v10)	6
5	(v4,v5)	10
6	(v9,v10)	12
7	(v1,v4)	17
8	(v3,v4)	18
9	Không chọn (v5,v9), vì tạo chu trình	
10	Không chọn (v5,v6), vì tạo chu trình	
11	(v1,v2)	32
	Tổng trọng số:	108



Bài 12. ***Tìm đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh của các đồ thị sau:***

a. Đồ thị có hướng



- Các ma trận xuất phát:

$$W_0 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 11 \\ 4 & 1 & \infty & \infty \end{bmatrix} \qquad P_0 = \begin{bmatrix} \infty & b & c & \infty \\ \infty & \infty & c & d \\ \infty & \infty & \infty & d \\ a & b & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

- Các ma trận được cập nhật lại sau khi qua đỉnh a:

  Có 1 giá trị thay đổi d $\rightarrow$ **a** $\rightarrow$ c : C(d,a) + C(a,c) = 9

$$W_1 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 11 \\ 4 & 1 & \underline{9} & \infty \end{bmatrix} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} \infty & b & c & \infty \\ \infty & \infty & c & d \\ \infty & \infty & \infty & d \\ a & b & \underline{a} & \infty \end{bmatrix}$$

- Các ma trận được cập nhật lại sau khi qua đỉnh b:

  Có 3 giá trị thay đổi a → **b** → d : C(a,b) + C(b,d) = 13

  d → **b** → c : C(d,b) + C(b,c) = 8 < W_1(d,c)=9

  d → **b** → d : C(d,b) + C(b,d) = 7

$$W_2 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \underline{13} \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 11 \\ 4 & 1 & \underline{8} & \underline{7} \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} \infty & b & c & \underline{b} \\ \infty & \infty & c & d \\ \infty & \infty & \infty & d \\ a & b & \underline{c} & \underline{b} \end{bmatrix}$$

- Các ma trận được cập nhật lại sau khi qua đỉnh c:

  Không có giá trị nào bị thay đổi.

$$W_3 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 11 \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} \infty & b & c & b \\ \infty & \infty & c & d \\ \infty & \infty & \infty & d \\ a & b & c & b \end{bmatrix}$$

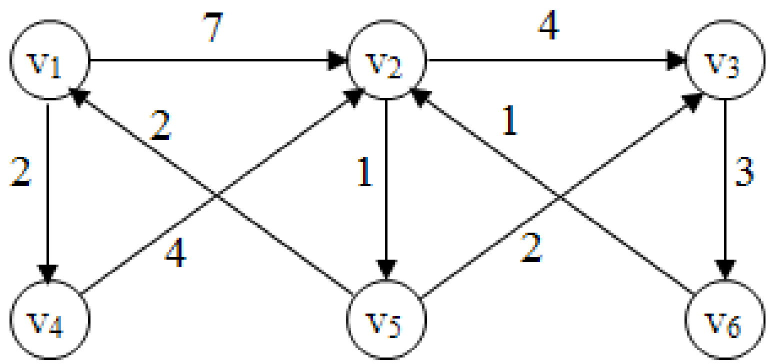
- Các ma trận được cập nhật lại sau khi qua đỉnh d:

  Có 5 giá trị thay đổi (a,a), (b,a), (b,b), (c,a), (c,b), (c,c)

$$W_4 = \begin{bmatrix} \underline{17} & 7 & 5 & 13 \\ \underline{10} & \underline{7} & 7 & 6 \\ \underline{15} & \underline{12} & \underline{19} & 11 \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad P_4 = \begin{bmatrix} \underline{b} & b & c & \underline{b} \\ \underline{d} & \underline{d} & c & d \\ \underline{d} & \underline{d} & \underline{b} & d \\ a & b & c & b \end{bmatrix}$$

Ta có ma trận khoảng cách ngắn nhất giữa các đỉnh $W^*=W_4$. Ví dụ: Đường đi ngắn nhất từ đỉnh b qua đỉnh a bằng 10, Từ ma trận $P=P_4$, ta có thể xác định được đường đi ngắn nhất giữa đỉnh b và a: i_1= P(b,a) = d, i_2 = P(d,a) = a. Vậy đường đi là: b → d → c

b. Đồ thị có hướng



$$W_0 = W = \begin{bmatrix} \infty & 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \qquad W_1 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \underline{9} & 2 & \underline{4} & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & \underline{11} & 2 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \underline{8} & \infty & \underline{5} & \infty \\ 2 & 9 & 2 & 4 & \underline{10} & \infty \\ \infty & 1 & \underline{5} & \infty & \underline{2} & \infty \end{bmatrix} \qquad W_3 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 11 & 2 & \underline{8} & \underline{14} \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \underline{7} \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 8 & \infty & 5 & \underline{11} \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10 & \underline{5} \\ \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & \underline{8} \end{bmatrix}$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} \infty & \underline{6} & \underline{10} & 2 & \underline{7} & \underline{13} \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 8 & \infty & 5 & 11 \\ 2 & \underline{8} & 2 & 4 & 9 & 5 \\ \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad W_5 = \begin{bmatrix} \underline{9} & 6 & \underline{9} & 2 & 7 & \underline{12} \\ 3 & \underline{9} & \underline{3} & 5 & 1 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ \underline{4} & 1 & \underline{4} & \underline{6} & 2 & \underline{7} \end{bmatrix}$$

Ta có ma trận khoảng cách ngắn nhất giữa các đỉnh là :

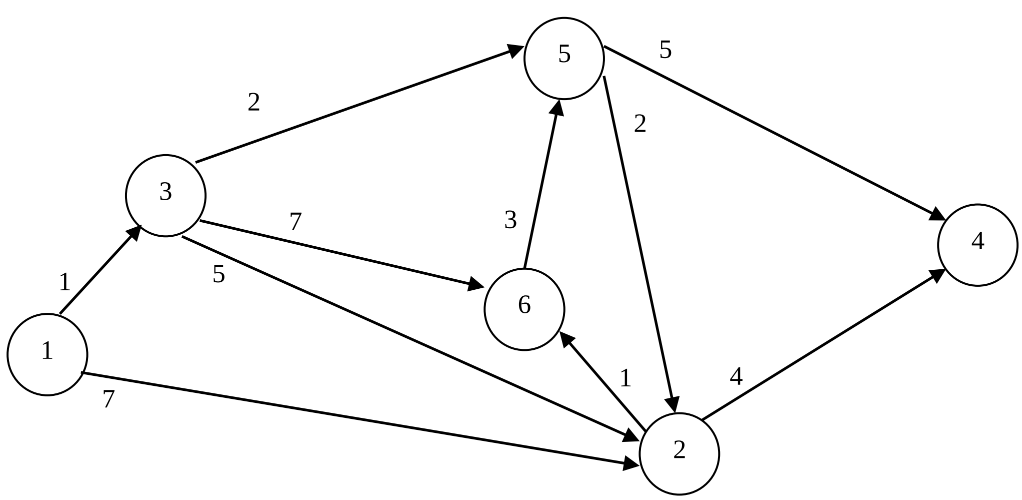
$$W^* = W_6 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & \underline{7} & 3 & 5 & 1 & 6 \\ \underline{7} & \underline{4} & \underline{7} & \underline{9} & \underline{5} & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & \underline{6} & 2 & 4 & \underline{7} & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Bài 13. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng - 8/2008)*

Đ ồ thị có hướng G = (V,E), được cho bởi ma trận trọng số như sau:

	1	2	3	4	5	6
1		7	1			
2				4		1
3		5			2	7
4						
5		2		5		
6					3	

a. Vẽ đồ thị



b. Gọi trọng số đã cho là khả năng thông qua của cung đó. Cho biết đồ thị đã cho có phải là mạng không? Tại sao?

Đồ thị đã cho là mạng, tại vì nó thỏa mãn các điều kiện:

- Đây là đồ thị có hướng và liên thông yếu
- Mỗi cung $(i,j) \in E$ đều có cij >0 (khả năng thông qua cung (i,j))
- Có duy nhất một đỉnh phát là đỉnh số 1 và duy nhất một đỉnh thu là đỉnh số 4.

c. Tính bậc ngoài của đỉnh 1 và bậc trong của đỉnh 4.

Bậc ngoài (ra) của đỉnh 1: $Deg^+(1) = 2$

Bậc trong (vào) của đỉnh 4: $Deg^-(4) = 2$

d. Dùng giải thuật Ford-Fulkerson trình bày cách tìm đường tăng luồng trong lần lặp thứ nhất.

Khởi tạo luồng $f(i,j) = 0$; $i,j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

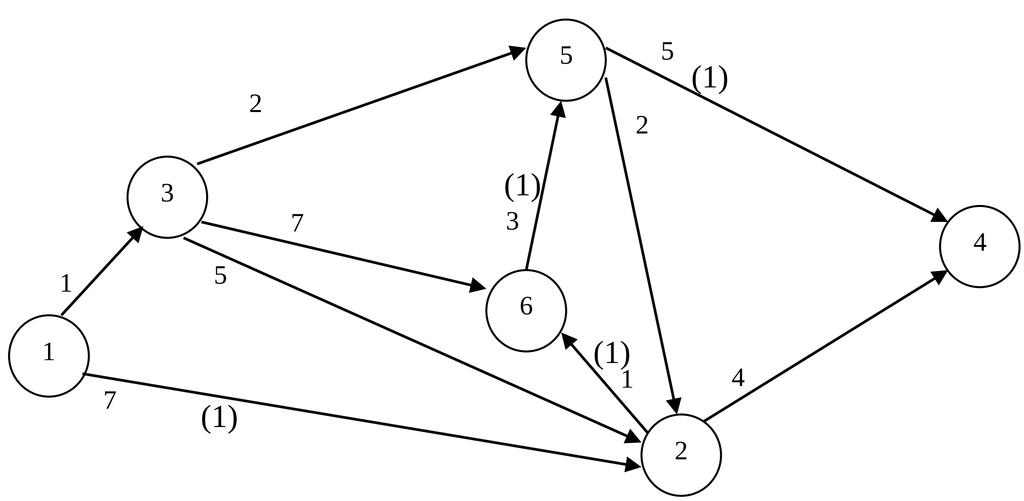
Bước lặp 1 : Đường tăng luồng $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$

$\Delta = \min(c_f(1,2), c_f(2, 6), c_f(6, 5), c_f(5, 4))$

$\Delta = \min(c(1, 2) - f(1,2), c(2, 6) - f(2, 6), c(6,5) - f(6,5), c(5,4) - f(5,4))$

$\Delta = \min(7 - 0, 1 - 0, 3 - 0, 5 - 0) = 1$

Vậy: $f(1,2) = 1$; $f(2,6) = 1$; $f(6,5) = 1$; $f(5,4) = 1$



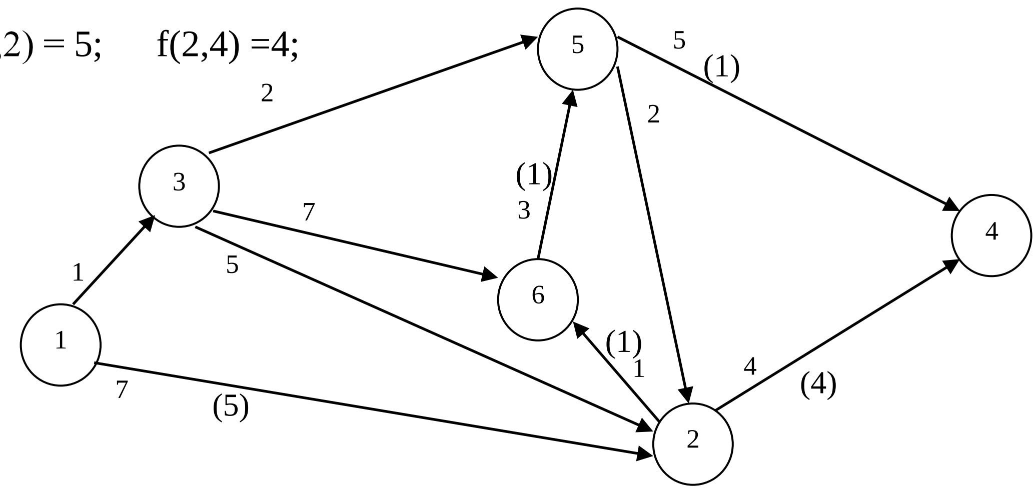
Đường tăng luồng 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 4

$\Delta = \min(c_f(1,2), c_f(2, 4))$

$\Delta = \min(c(1, 2) - f(1,2),\ c(2, 4) - f(2, 4))$

$\Delta = \min(7 - 1, 4 - 0) = 4$

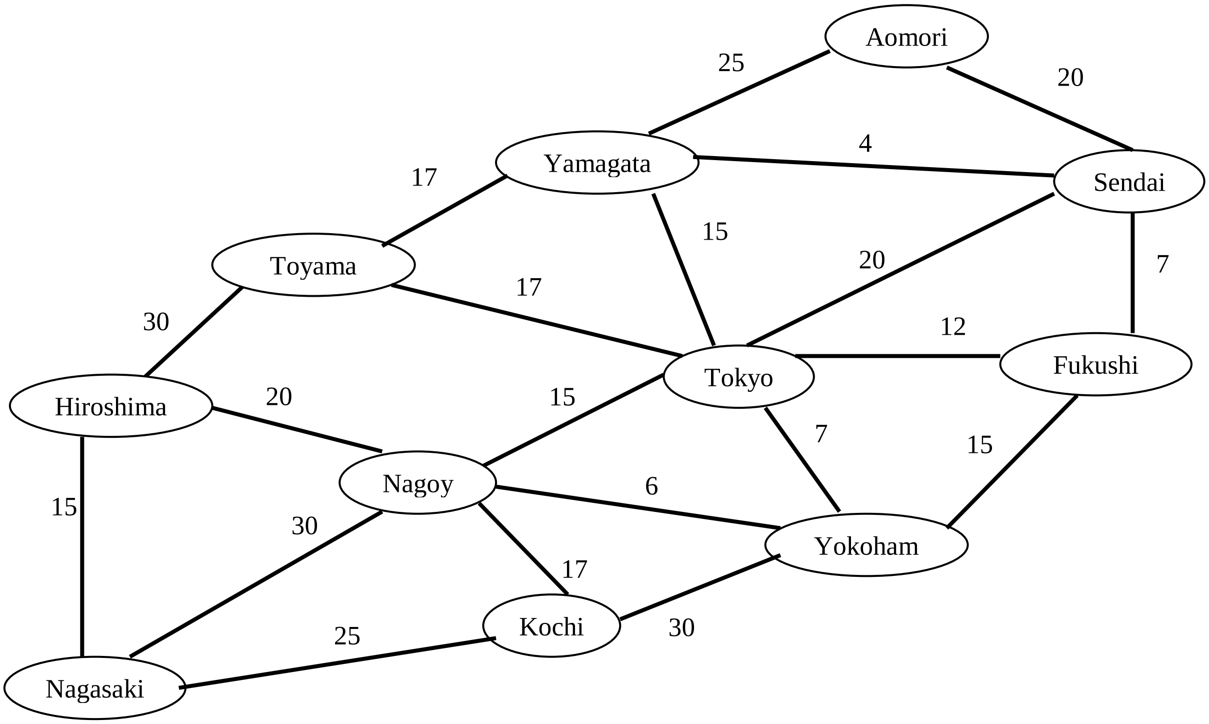
Vậy: f(1,2) = 5;   f(2,4) =4;



Bài 14. *(Đề thi cao học 3/2011 – ĐH Đà Nẵng)*

Giả sự nước Nhật xây dựng lại mạng viễn thông như đồ thị đã cho, giữa hai thành phố có thể kết nối trực tiếp hoặc gián tiếp qua các thành phố khác. Ưu tiến các đường truyền trực tiếp từ các thành phố đến Tokyo hơn là gián tiếp nếu có cùng chi phí. Mỗi thành phố được biểu diễn bởi một đỉnh của đồ thị, trọng số của cung là ước tính chi phí xây dựng đường truyền. Chất lượng đường truyền giữa hai thành phố chính bằng số các thành phố trung gian giữa hai thành phố. Nếu hai thành phố được nối trực tiếp sẽ cho chất lượng tốt nhất. Chất lượng đường truyền của toàn hệ thống chính bằng chất lượng kết nối xấu nhất giữa hai thành phố nào đó.

a. *Tính chi phí tối thiểu để xây dựng hệ thống đường truyền liên thông giữa các thành phố.*
b. *Chi phí tối thiểu để xây dựng hệ thống đường truyền liên thông mà tất cả các đường truyền xuất phát từ Tokyo đều được giữ lại.*
c. *Hãy tính chất lượng đường truyền của toàn hệ thống. Hãy cho biết các cặp thành phố nào có chất lượng thấp nhất.*
d. *Hãy đưa ra phương án tối ưu sao cho nếu có một cung nào đó bị xóa, thì đồ thị vẫn liên thông.*



a. Chi phí tối thiểu để xây dựng hệ thống đường truyền liên thông giữa các thành phố chính bằng giá trị cây khung nhỏ nhất của đồ thị. Ta dùng thuật toán Kruskal để tìm cây bao trùm tối thiểu như sau:

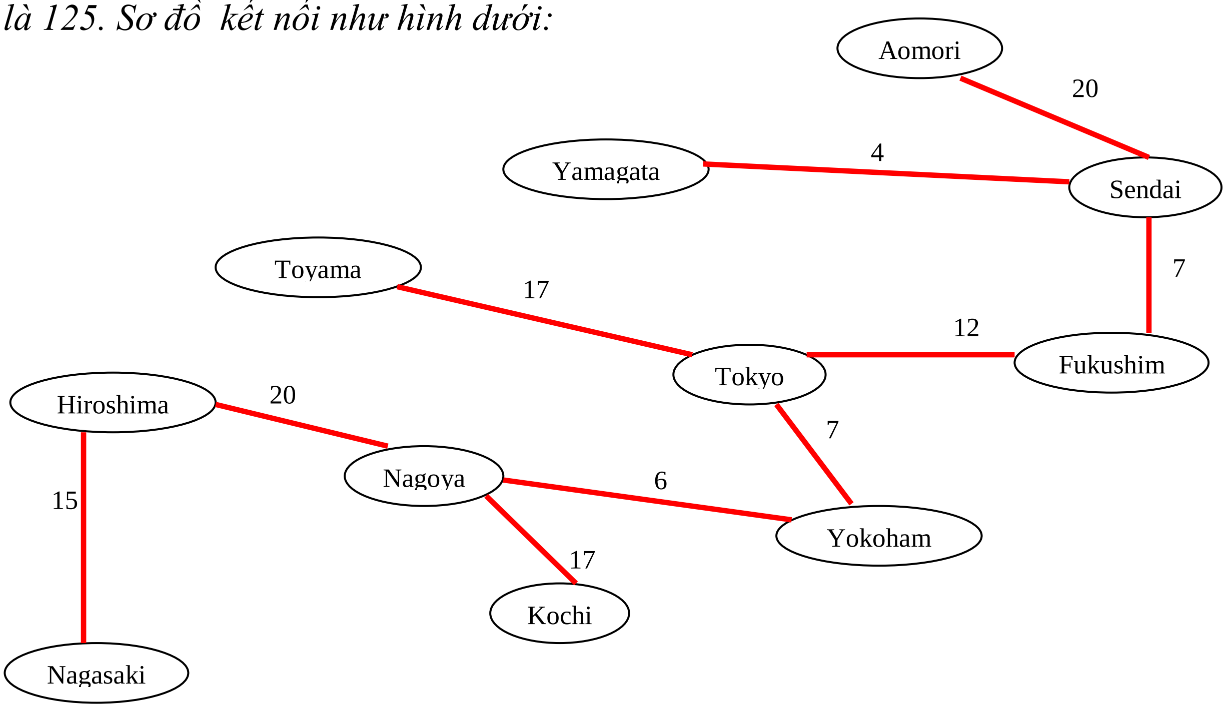
- Khởi tạo T= ∅.
- Sắp xếp các cạnh của đồ thị theo thứ tự trọng số tăng dần vào tập Z

Z={(Ya,Se), (Nago,Yo), (Toky, Yo), (Fu,Se), (Toky,Fu), (Toky,Nago), (Toky,Ya), (Naga,Hi), (Yo,Fu), (Toky,To), (To,Ya), (Nago,Ko), (Toky,Se), (Se,Ao), (Nago,Hi), (Ko,Naga), (Ao,Ya), (Nago,Naga), (To,Hi), (Ko,Yo)}
Trọng số tương ứng: 4, 6, 7, 7, 12, 15, 15, 15, 15, 17, 17, 17, 20, 20, 20, 25, 25, 30, 30, 30

Bước lặp	Cạnh được chọn và đưa vào T	Trọng số
1	(Ya,Se)	4
2	(Nago,Yo)	6
3	(Toky, Yo)	7
4	(Fu,Se)	7
5	(Toky,Fu)	12

6	Không chọn (Toky,Nago), vì tạo chu trình	
7	Không chọn (Toky,Ya), vì tạo chu trình	
8	(Naga,Hi)	15
9	Không chọn (Yo,Fu), vì tạo chu trình	
10	(Toky,To)	17
11	Không chọn (To,Ya), vì tạo chu trình	
12	(Nago,Ko)	17
13	Không chọn (Toky,Se), vì tạo chu trình	
14	(Se,Ao)	20
15	(Nago,Hi)	
16	Không chọn (Ko,Naga), vì tạo chu trình	
17	Không chọn (Ao,Ya), (Nago,Naga), (To,Hi), (Ko,Yo), vì tạo chu trình	
	Tổng trọng số:	125

Chi phí tối thiểu để xây dựng hệ thống đường truyền liên thông giữa các thành phố là 125. Sơ đồ kết nối như hình dưới:

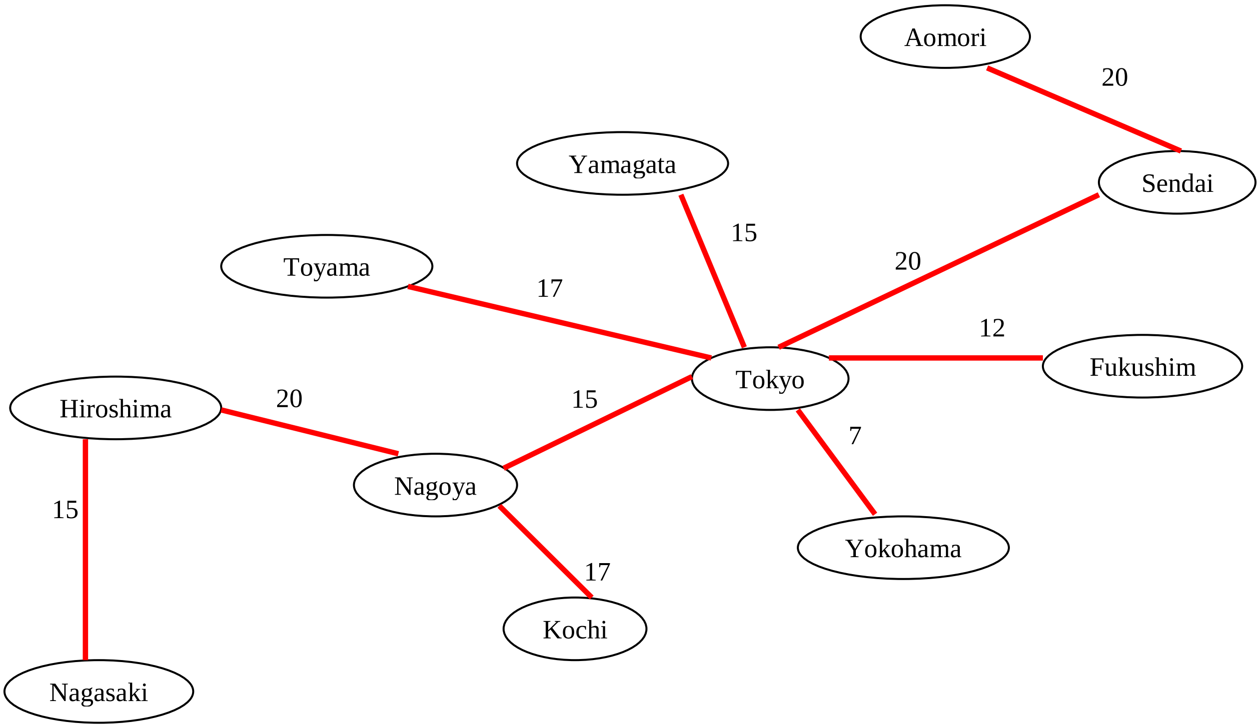


b. Khởi tạo T= {(Toky,Ya), (Toky, Se), (Toky, Fu), (Toky,Yo), (Toky,Nago)}.

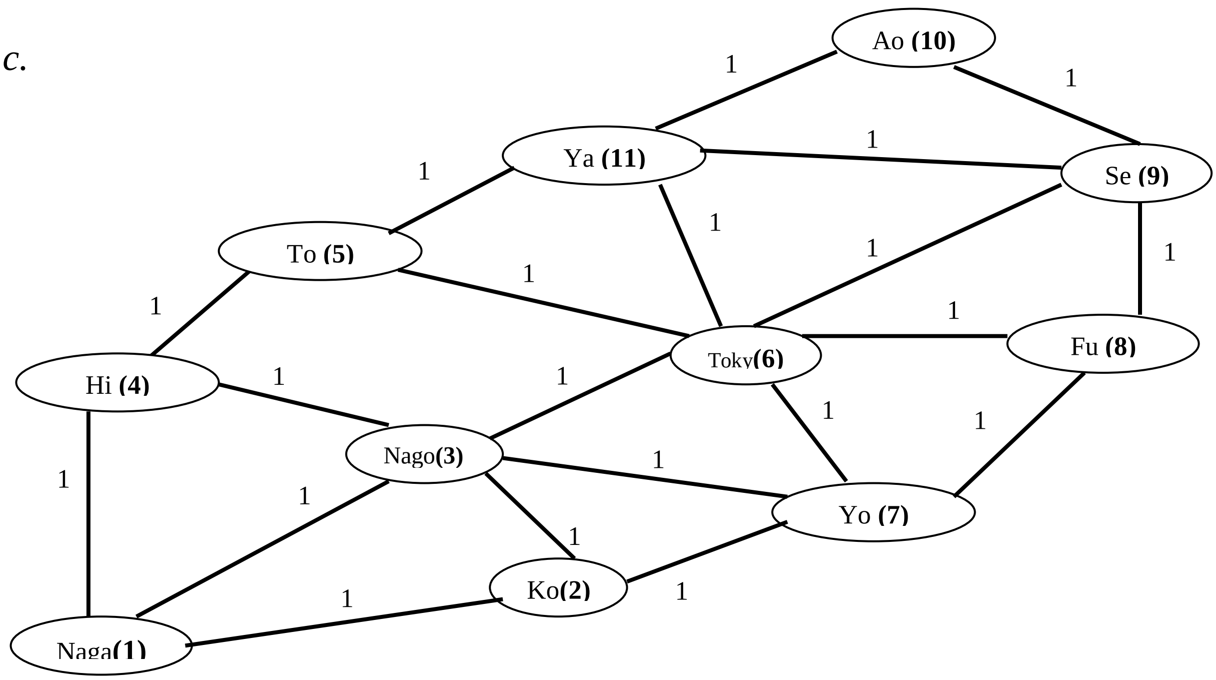
Z = E\T. Sắp xếp các cạnh của đồ thị trong Z theo thứ tự trọng số tăng dần
Z ={(Ya,Se), (Nago,Yo), (Fu,Se), (Naga,Hi), (Yo,Fu), (Nago,Ko), (Se,Ao), (Nago,Hi), (Ko,Naga), (Ao,Ya), (Nago,Naga), (To,Hi), (Ko,Yo)}

Bước lặp	Cạnh được chọn và đưa vào T	Trọng số
1	Không chọn (Ya,Se), vì tạo chu trình	
2	Không chọn (Nago,Yo), vì tạo chu trình	
3	Không chọn (Fu,Se), vì tạo chu trình	
4	(Naga,Hi)	15
5	Không chọn (Yo,Fu), vì tạo chu trình	
6	(Nago,Ko)	17
7	(Se,Ao)	20
8	(Nago,Hi)	20
9	Không chọn (Ko,Naga), (Ao,Ya), (Nago,Naga) (To,Hi), (Ko,Yo), vì tạo chu trình	

Chi phí tối thiểu để xây dựng hệ thống đường truyền liên thông mà tất cả các đường truyền xuất phát từ Tokyo đều được giữ lại là : 158 và đường kết nối như hình sau:



c.



Dùng thuật toán Floy tìm đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh, trọng số của đồ thị cij=1 (nếu đỉnh i có cạnh nối với đỉnh j: i,j = 1..11), cij = ∞ (nếu đỉnh i không có cạnh nối với đỉnh j).

Ma trận liền kề của đồ thị

$$W_0 = W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & \infty & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & \infty & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & \infty & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 & \infty & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

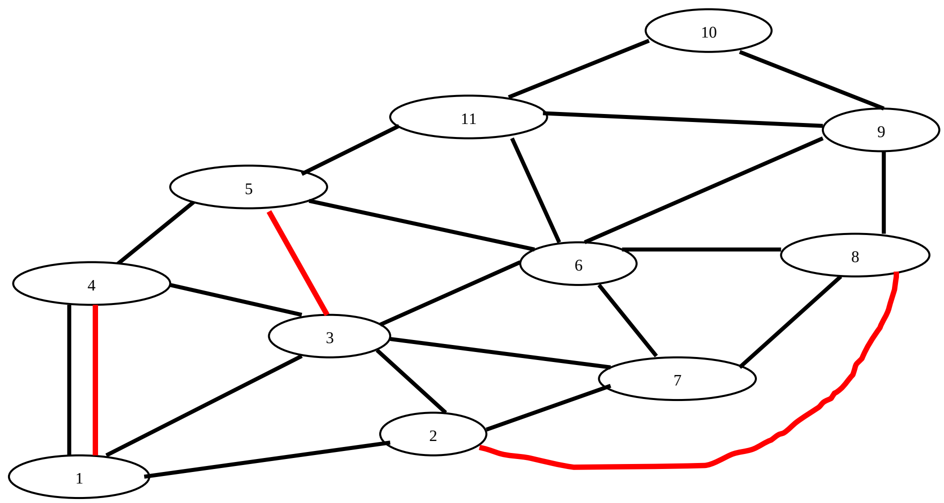
$$W_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & \infty & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & \infty & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & \infty & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \infty & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & \infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \infty & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & \infty & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & \infty & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & \infty & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \infty & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & \infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \infty & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & \infty & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & \infty & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & \infty & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \infty & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & \infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \infty & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & \infty & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

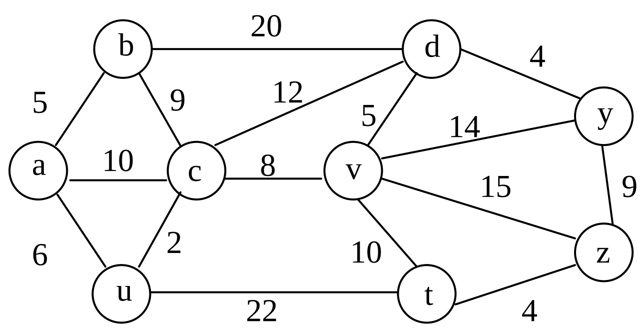
Từ ma trận W11, ta có chất lượng đường truyền của toàn hệ thống là 4. Các cặp thành phố có chất lượng thấp nhất là: (Nagasaki, Aomori), (Kochi Aomori).

c. Phương án tối ưu sao cho nếu có một cung nào đó bị xóa, thì đồ thị vẫn liên thông. Thêm cạnh để đồ thị thành đồ thị Euler (Tất cả các đỉnh của đồ thị có bậc chẵn). Khi đó nếu có 1 cạnh nào bị xóa đồ thị vẫn còn đường đi Euler.



Bài 15. *(Đề thi cao học ĐH CNTT TP HCM - 2010)*

Cho đồ thị G như sau:



a. Viết biểu diễn ma trận của đồ thị G.

	a	b	c	d	u	v	t	y	z
a	0	5	10	∞	6	∞	∞	∞	∞
b	5	0	9	20	∞	∞	∞	∞	∞
c	10	9	0	12	2	8	∞	∞	∞
d	∞	20	12	0	∞	5	∞	4	∞
u	6	∞	2	∞	0	∞	22	∞	∞
v	∞	∞	8	5	∞	0	10	14	15
t	∞	∞	∞	∞	22	10	0	∞	4
y	∞	∞	∞	4	∞	14	∞	0	9
z	∞	∞	∞	∞	∞	15	4	9	0

b. Trình bày một thuật toán để tìm cây bao trùm tối thiểu của một đồ thị có trọng số. Áp dụng thuật toán đó để tìm cây bao trùm tối thiểu của đồ thị G.

Thuật toán Prim để tìm cây khung nhỏ nhất như sau:

Các bước chính của thuật toán Prim tìm cây phủ nhỏ nhất T của đồ thị liên thông có trọng số G được mô tả như sau:

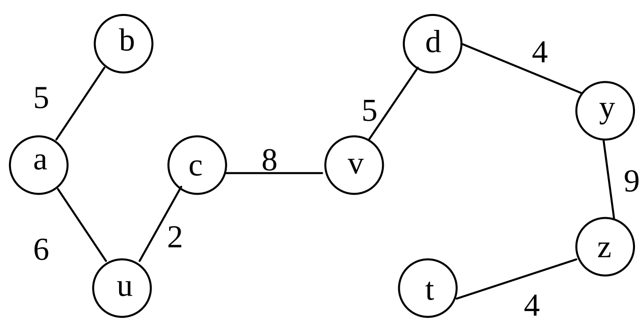
Bước 1 : T := {v} v là đỉnh bất kỳ.

Bước 2 : Lặp n-1 lần

- Tìm đỉnh rìa v có cạnh e nối T với trọng số nhỏ nhất
- Đưa e vào T

	a	b	c	d	u	v	t	y	z	T_v	T_e
Khởi tạo	-	**5,a**	10,a	∞,a	6,a	∞,a	∞,a	∞,a	∞,a	a	∅
1	-	-	9,b	20,b	**6,a**	∞,a	∞,a	∞,a	∞,a	a,b	ab
2	-	-	**2,u**	20,b	-	∞,a	22,u	∞,a	∞,a	a, b, u	ab, au
3	-	-	-	12,c	-	**8,c**	22,u	∞,a	∞,a	a, b, u, c	ab, au, uc
4	-	-	-	**5,v**	-	-	10,v	14,v	15,v	a, b, u, c, v	ab, au, uc, cv
5	-	-	-	-	-	-	10,v	**4,d**	15,v	a, b, u, c, v, d	ab, au, uc, cv, vd
6	-	-	-	-	-	-	10,v	-	**9,y**	a, b, u, c, v, d, y	ab, au, uc, cv, vd, dy
7	-	-	-	-	-	-	**4,z**	-	-	a, b, u, c, v, d, y, z	ab, au, uc, cv, vd, dy, yz
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	a, b, u, c, v, d, y, z, t	ab, au, uc, cv, vd, dy, yz, zt

Tập cạnh của cây khung nhỏ nhất cần tìm là T={(a,b), (a,u), (u,c), (c,v), (v,d), (d,y), (y,z) , (z,t)} trọng số nhỏ nhất bằng : 5+2+5+6+8+4+4+9 =43 . Cây khung được vẽ như sau:



c. Giả sử e1 và e2 là hai cạnh của G. Hãy xây dựng một thuật toán tìm một cây bao trùm của đồ thị G thỏa mãn các điều kiện sau: T không chứa các cạnh e1 và e2, và tổng trọng số các cạnh của cây T là nhỏ nhất. Áp dụng thuật toán đó để tìm cây bao trùm tối thiểu của G không chứa các cạnh uc và dy.

Bước 1:

- Khởi tạo T:= ∅. Z = E\{e1,e2}
- Sắp xếp tập các cạnh của đồ thị trong Z, theo thứ tự trọng số tăng dần.

Bước 2: Trong khi (|T| <n-1) và Z ≠ ∅) thực hiện:

- Tìm cạnh e có trọng số nhỏ nhất trong tập Z. Z= Z\{e}
- Nếu T U {e} không tạo chu trình thì T = T U {e}

Áp dụng thuật toán trên tìm cây bao trùm tối thiểu như sau:

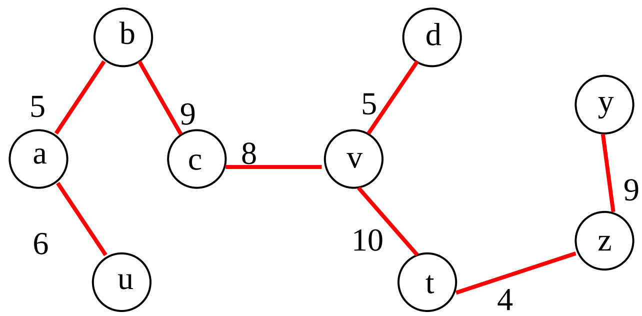
- Khởi tạo T:= ∅.

- Sắp xếp các cạnh của đồ thị theo thứ tự trọng số tăng dần, trừ cạnh uc và dy như sau:

Z={(t,z ‘4’), (a,b ‘5’), (d,v ‘5’), (a,u ‘6’), (c,v ‘8’), (b,c ‘9’), (y,z ‘9’), (a,c ‘10’), (v,t ‘10’), (c,d ‘12’), (v,y ‘14’), (v,z ‘15’), (b,d ‘20’), (u,t ‘22’)}.

Bước lặp	Cạnh được chọn và đưa vào T	Trọng số
1	T,Z	4
2	A,B	5
3	D,V	5
4	A,U	6
5	C,V	8
6	B,C	9
7	Y,Z	9
8	Không chọn cạnh (A,C), vì tạo chu trình	
9	V,T	10
10…	Không chọn cạnh (c,d), (v,y), (v,z), (b,d), (u,t), vì tạo chu trình	
	Tổng trọng số:	56

Cây khung được vẽ như sau:



Bài 16. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng – 3/2010)*

Hãy vẽ con nhị phân và giải thích cách vẽ sao cho khi duyệt cây theo thứ tự trước (preorder G-T-P) ta được danh sách các đỉnh A, B, D, E, C, F, G và khi duyệt theo thứ tự giữa (Inorder T-G-P) thì ta được D, B, E, A, F, G, C. Cho biết kết quả duyệt cây theo thứ tự cuối (Postorder)?

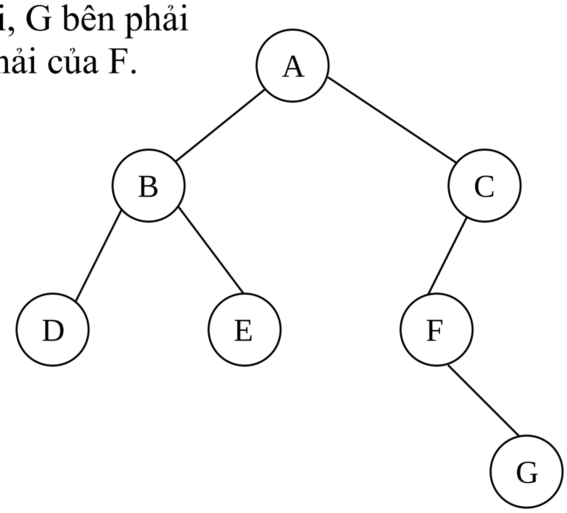
Theo đề bài kết quả duyệt cây theo thứ tự trước ta có danh sách các đỉnh : A, B, D, E, C, F, G. Vì vậy, ta có thể xác định A là nút gốc của cây.

Kết quả duyệt cây theo thứ tự giữa, ta có danh sách các đỉnh : D, B, E, A, F, G, C. Vì A là gốc nên các đỉnh D, B, E thuộc cây con bên trái và F, G, C là cây con bên phải.
Một các phân tích tương tự :

Duyệt G-T-P: B, D, E => B là gốc cây con bên trái
T-G-P: D, B, E D là nút con bên trái, E là nút con bên phải

G-T-P: C, F, G => C gốc, F bên trái, G bên phải
T-G-P: F, G, C => G nút con bên phải của F.

Từ các phân tích trên ta vẽ cây như sau:



Kết quả khi duyệt cây theo hậu thứ tự:
(T-P-G): D, E, B, G, F, C, A

Bài 17. *(Đề thi cao học T10-2010 Đà Nẵng)*

a. Một đồ thị có 15 cạnh với 3 đỉnh bậc 4, các đỉnh còn lại đều bậc 3, hỏi đồ thị có bao nhiêu đỉnh?

Gọi A là số đỉnh bậc 3 của đồ thị, ta có tổng số bậc của đồ thị là: 3*4+A*3 = 12+3A.

Ta có tổng số bậc của đồ thị bằng hai lần số cạnh: 12+3A = 2.15 = 30

⇨ 3A = 18 => A = 6.

Vậy đồ thị có 3 + 6 = 9 đỉnh.

b. Một đồ thị vô hướng không chứa chu trình và có ít nhất hai đỉnh được gọi là rừng. Trong một rừng, mỗi thành phần liên thông là một cây. Cho đồ thị là một rừng có n đỉnh và t cây. Hãy cho biết đồ thị có bao nhiêu cạnh?

Gọi n_i là số đỉnh của cây i (i=1..t). Ta có số cạnh của cây i là: n_i-1

Số đỉnh của đồ thị bằng tổng các đỉnh của từng cây: $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_i$

Số cạnh của đồ thị bằng tổng các cạnh của từng cây:

$(n_1 – 1) + (n_2 – 1) + (n_3 – 1) + \ldots + (n_i – 1) = (n_1 + n_2 + n_3 + ..+n_i) – t = n – t$

Vậy số cạnh của đồ thị là : n – t cạnh.

Bài 18. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng – 3/2010)*

Nêu các điều kiện để một đồ thị G đã cho có cây bao trùm. CMR nếu đồ thị G đã cho có duy nhất một cây khung thì G cũng là một cây?

Điều kiện để một đồ thị đã cho có cây bao trùm khi và chỉ khi G vô hướng và liên thông.

- Giả thiết đồ thị G đã cho có duy nhất 1 cây bao trùm là T.

- Giả sử G không phải là một cây, khi đó: G ≠ T.

- Giả sử tồn tại một cạnh e sao cho e ∈ G\T. Thêm cạnh e vào T, thì tạo ra một chu trình, trên chu trình này phải có một cạnh e’ khác e.

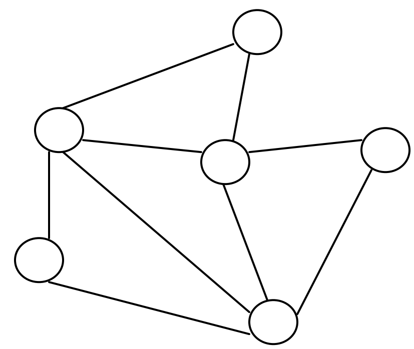
Khi đó T’ = (T U {e}\{e’}) là một cây bao trùm của G khác T. Điều này vô lý => đồ thị G có duy nhất một cây khung thì G cũng là một cây.

Bài 19. *(Đề thi cao học ĐHCNTT TPHCM – 5/2006)*

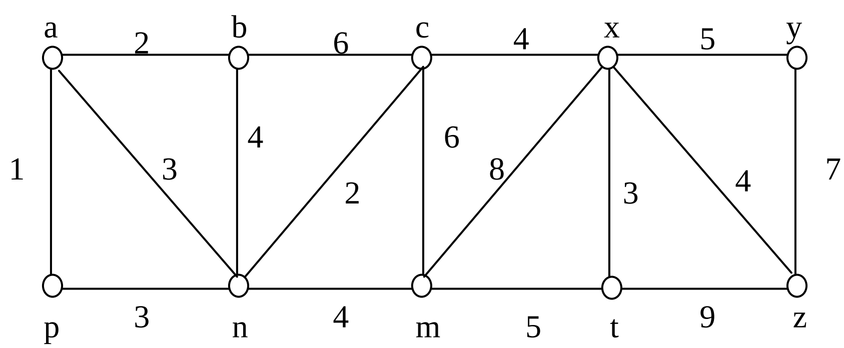
a. Cho đồ thị đơn vô hướng liên thông G có 6 đỉnh với bậc lần lượt là 2, 2, 2, 4, 4 và 4. Cho biết số cạnh của G và vẽ phác họa đồ thị G.

Ta có tổng bậc của đồ thị là: 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 18.
Gọi n là số cạnh của đồ thị G
Vì G là đồ thị đơn vô hướng liên thông, nên tổng số bậc của đồ thị bằng 2 lần số cạnh. Tức là: $18 = 2n \Rightarrow n = 9$.

Đồ thị được phác họa như sau:



b. Cho đồ thị đơn vô hướng liên thông H với các cạnh có trọng số như hình vẽ dưới. Hãy tìm một cây bao trùm tối thiểu T của H và tính tổng trọng số của T.



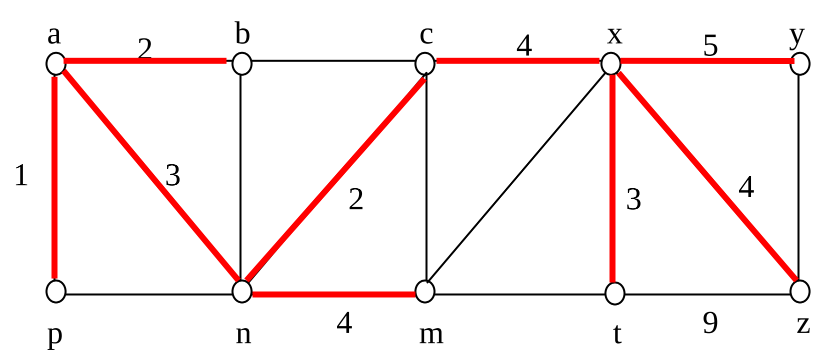
- Khởi tạo T:= ∅

- Sắp xếp các cạnh của đồ thị theo thứ tự trọng số tăng dần, trừ cạnh uc và dy như sau:

Z={(a,p ‘1’), (a,b ‘2’), (c,n ‘2’), (a,n ‘3’), (n,p ‘3’), (x,t ‘3’), (b,n ‘4’), (c,x ‘4’), (x,z ‘4’), (m,n ‘4’), (x,y ‘5’), (m,t ‘5’), (b,c ‘6’), (c,m ‘6’), (y,z ‘7’), (m,x ‘8’), (t,z ‘9’)}.

Bước lặp	Cạnh được chọn và đưa vào T	Trọng số
1	A,P	1
2	A,B	2
3	C,N	2
4	A,N	3
5	Không chọn cạnh (N,P), vì tạo chu trình	
6	X,T	3
7	Không chọn cạnh (B,N), vì tạo chu trình	
8	C,X	4
9	X,Z	4
10	M,N	4
11	X,Y	5
12…	Không chọn các cạnh: (m,t), (b,c), (c,m), (y,z), (m,x), (t,z), vì tạo chu trình	
	Tổng trọng số:	28

Cây khung được vẽ như sau:

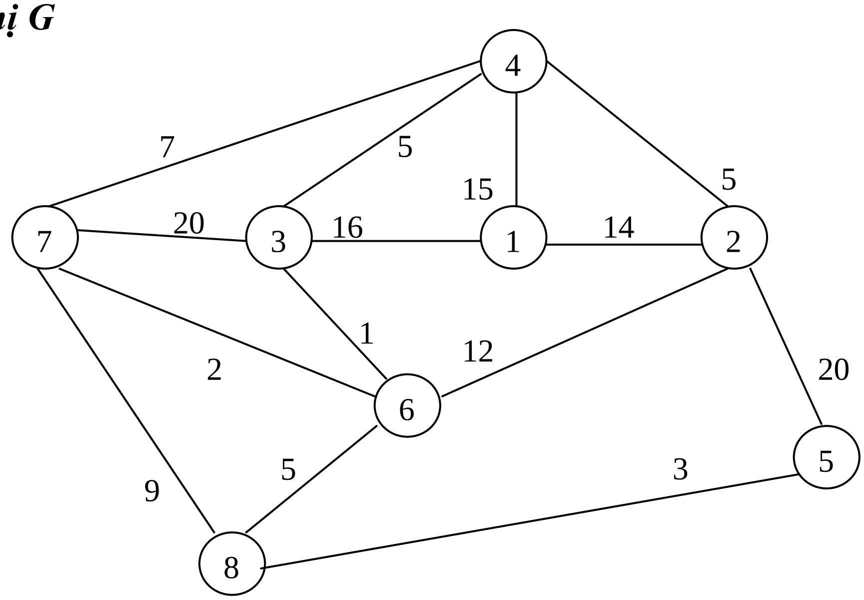


Bài 20. *(Đề thi cao học ĐH Đà Nẵng)*

Đ ồ thị có hướng G = (V,E), được cho bởi ma trận trọng số như sau:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		14	16	15				
2	14			5	20	12		
3	16			5		1	20	
4	15	5	5				7	
5		20						3
6		12	1				2	5
7			20	7		2		9
8					3	5	9	

a. Vẽ đồ thị G



b. Chứng tỏ đồ thị G là đồ thị bán Euler. Tìm đường đi Euler của đồ thị.

Đồ thị G là đồ thị bán Euler vì nó có 6 đỉnh bậc chẵn, 2 đỉnh bậc lẻ, đó là: deg(8)=3 và deg(1)=3.

Đường đi Euler: 1 → 2 → 5 → 8 → 6 → 3 → 4 → 7.

c. Dùng thuật toán Dijstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 8.

B.lặp	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
Khởi tạo	**x1**	(∞,x1)	(∞,x1)	(∞,x1)	(∞,x1)	(∞,x1)	(∞,x1)	(∞,x1)
1	-	**14,x1**	16,x1	15,x1	∞,x1	∞,x1	∞,x1	∞,x1
2	-	-	16,x1	**15,x2**	34,x2	28,x2	∞,x1	∞,x1
3	-	-	**16,x1**	-	34,x2	28,x2	22,x4	∞,x1
4	-	-	-	-	34,x2	**17,x3**	22,x4	∞,x1
5	-	-	-	-	34,x2	-	**19,x7**	22,x6
6	-	-	-	-	34,x2	-	-	**22,x6**

Đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 8 là: 1→3→6→8.

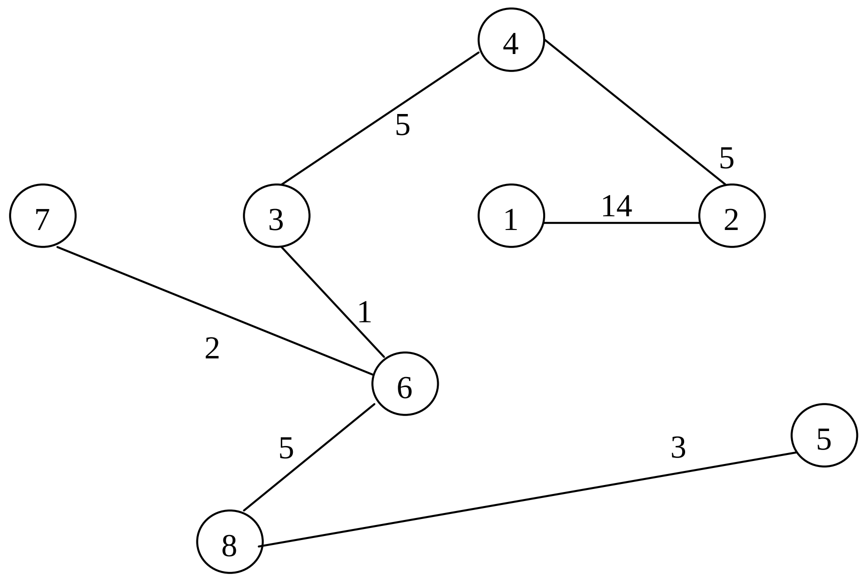
Độ dài đường đi là: 22.

d. Dùng thuật toán Prim để tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	T_v	T_e
Khởi tạo	-	**14,x1**	16,x1	15,x1	∞,x1	∞,x1	∞,x1	∞,x1	x1	∅
1	-	-	16,x1	**5,x2**	20,x2	12,x2	∞,x1	∞,x1	x1, x2	x1x2
2	-	-	**5,x4**	-	20,x2	12,x2	7,x4	∞,x1	x1, x2, x4	x1x2, x2x4
3	-	-	-	-	20,x2	**1,x3**	7,x4	∞,x1	x1, x2, x4, x3	x1x2, x2x4, x4x3
4	-	-	-	-	20,x2	-	**2,x6**	5,x6	x1, x2, x4, x3, x6	x1x2, x2x4, x4x3, x3x6
5	-	-	-	-	20,x2	-	-	**5,x6**	x1, x2, x4, x3, x6, x7	x1x2, x2x4, x4x3, x3x6, x6x7
6	-	-	-	-	**3,x8**	-	-	-	x1, x2, x4, x3, x6, x7, x8	x1x2, x2x4, x4x3, x3x6, x6x7, x6x8
7	-	-	-	-		-	-	-	x1, x2, x4, x3, x6, x7, x8, x5	x1x2, x2x4, x4x3, x3x6, x6x7, x6x8, x8x5

Tập cạnh của cây khung nhỏ nhất là: x1x2, x2x4, x4x3, x3x6, x6x7, x6x8, x8x5. Độ dài của cây khung nhỏ nhất bằng 35.

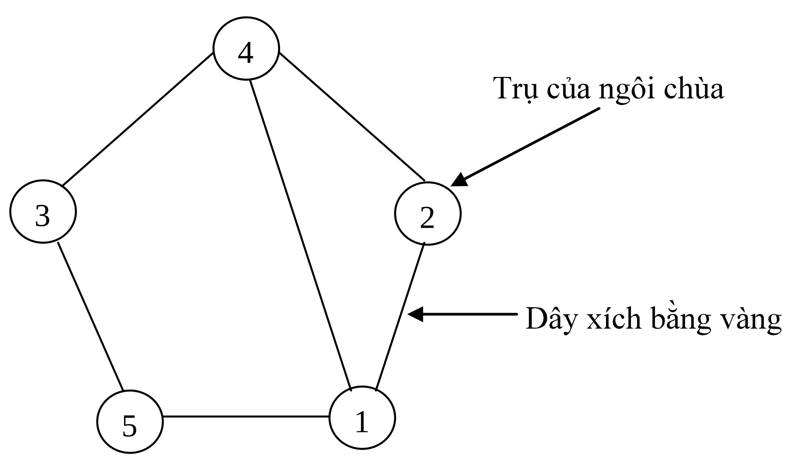
Cây khung được vẽ như sau:



Bài 21. *(Đề thi cao học Đà Nẵng – 9/2011)*

Một ngôi chùa linh thiêng có 5 trụ bằng kim cương. Người ta đúc các dây xích bằng vàng để nối các trụ lại với nhau, với điều kiện mỗi trụ chỉ được nối với đúng 3 trụ khác. Các nhà sư nghĩ mãi không tìm ra cách nối. Anh (chị) hãy giải thích tại sao?

Ta xem mỗi trụ của ngôi chùa là một đỉnh của đồ thị và dây xích bằng vàng nối các trụ lại với nhau là các cạnh nối các đỉnh của đồ thị



Gọi e là tổng số cạnh của đồ thị (e là số nguyên dương)

Theo đề bài mỗi trụ chỉ được nối với 3 trụ khác, điều này có nghĩa là một đỉnh của đồ thị đều có bậc là 3. Mà đồ thị có 5 đỉnh, nên tổng số bậc của đồ thị là 3.5 = 15.

Đây là đồ thị vô hướng liên thông, nên ta có tổng số bậc bằng 2 lần số cạnh, tức là:

$$2e = 15 \Rightarrow e=15/2 = 7.5$$

Vì e phải là số nguyên dương, mà trường hợp này e = 7.5. Điều này có nghĩa là không thể tồn tại một đồ thị có 5 đỉnh mà mỗi đỉnh đều có bậc bằng 5.

Vậy ta không thể xây dựng ngôi chùa có 5 trụ, mà mỗi trụ chỉ nối đúng với 3 trụ khác bằng dây xích vàng.

Bài 22. ***Có thể tìm được một cây có 8 đỉnh và thoả điều kiện dưới đây hay không? Nếu có, hãy vẽ cây đó, nếu không, giải thích tại sao:***

a. Mọi đỉnh đều có bậc 1.

Cây có 8 đỉnh, nên số cạnh của nó là 8-1 = 7.

Cây là một đồ thị, nên tổng số bậc bằng 2 lần số đỉnh.

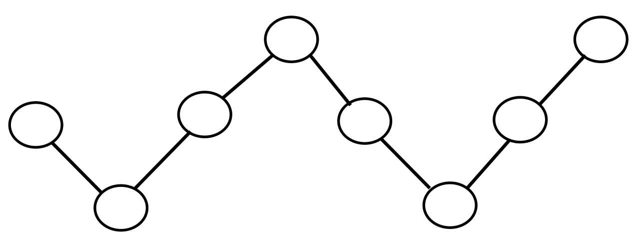
Mọi đỉnh đều bậc 1, nên ta có: 8 = 2.7 (vô lý) Không tồn tại.

b. Mọi đỉnh đều có bậc 2.

Mọi đỉnh đều bậc 2, nên ta có: 8.2 = 2.7 (vô lý) Không tồn tại.

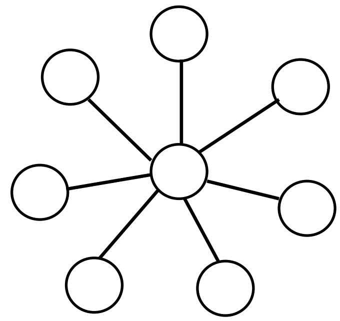
c. Có 6 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 1.

6.2 + 2.1 = 2.7 Có cây 6 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 1, được vẽ như sau:

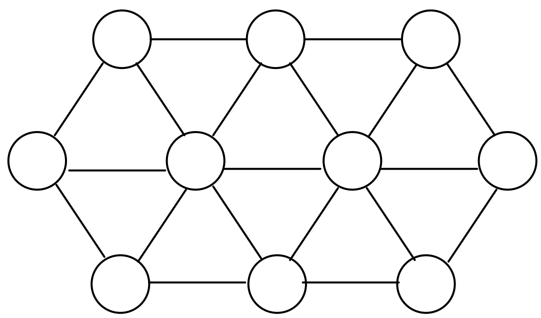


d. Có 1 đỉnh bậc 7 và 7 đỉnh bậc 1.

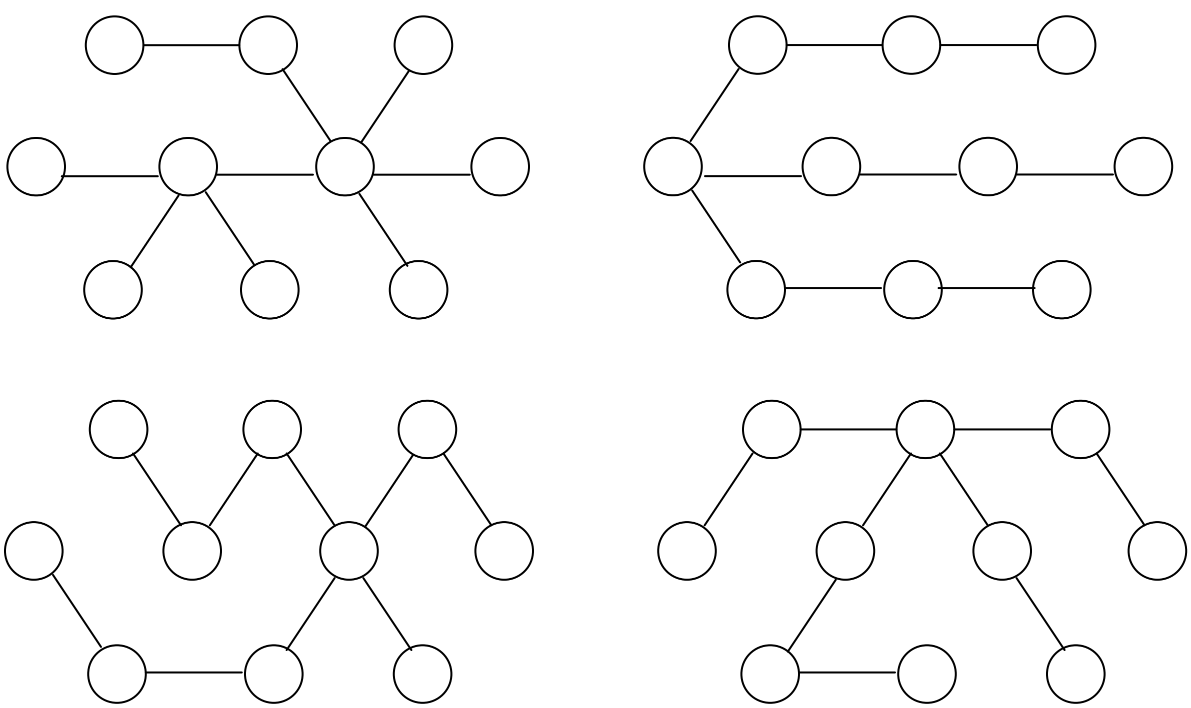
7 + 7.1 = 2.7 Có cây 1 đỉnh bậc 7 và 7 đỉnh bậc 1, được vẽ như sau:



Bài 23. ***Hãy tìm cây khung của đồ thị sau bằng cách xoá đi các cạnh trong các chu trình đơn.***

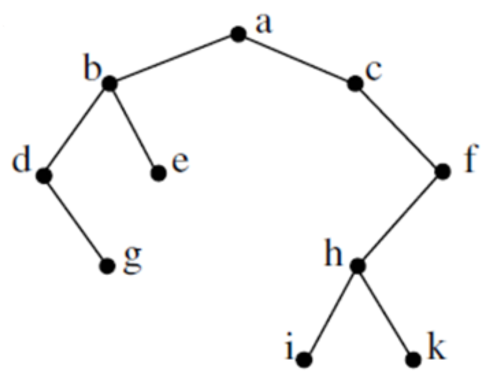


Các cây khung như sau:



Bài 24.

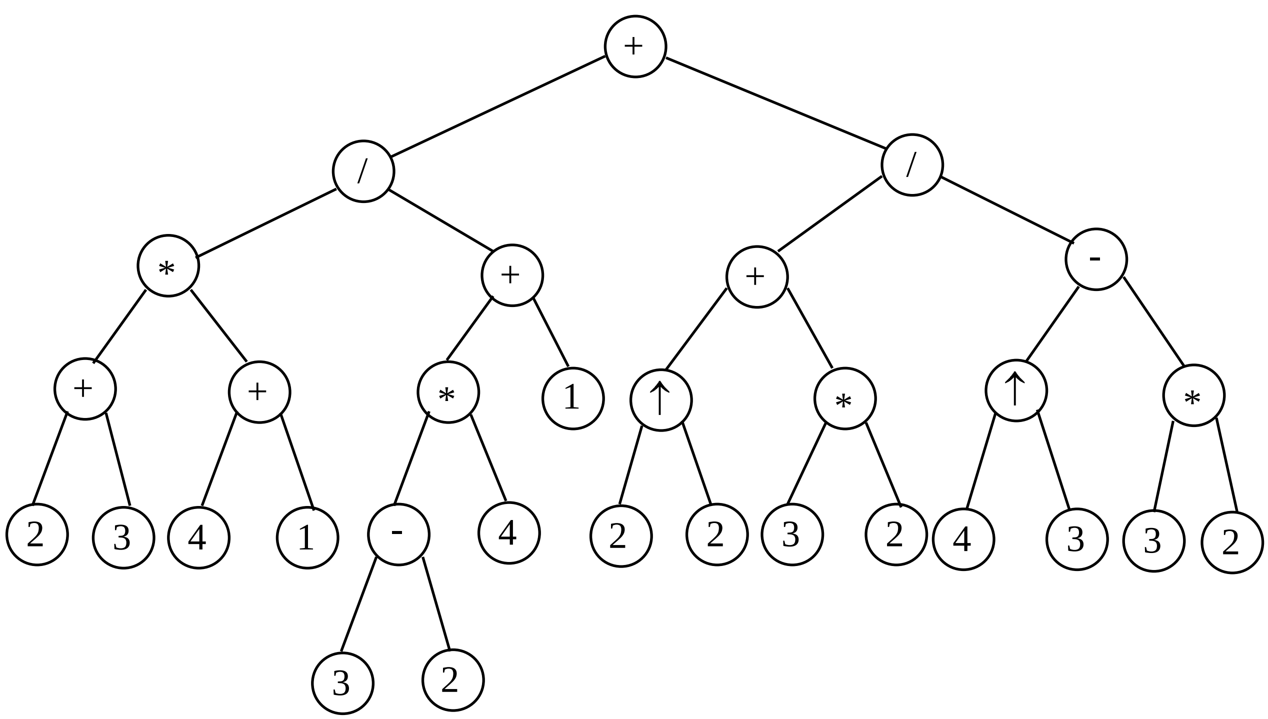
a. Duyệt các cây sau theo các thuật toán tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự



- Tiền thứ tự (Gốc – Trái – Phải): ABDGECFHIK.
- Trung thứ tự (Trái – Gốc – Phải): DGBEACIHKF.
- Hậu thứ tự (Trái – Phải – Gốc): GDEBIKHFCA.

b. Vẽ cây nhị phân biểu diễn biểu thức sau:

$$\frac{(2+3)(4+1)}{(3-2)4+1}+\frac{2^2+3.2}{4^3-3.2}$$



c. Viết ký pháp Ba Lan, nghịch đảo Ba Lan của biểu thức ở câu b.

Ký pháp Ba Lan là kết quả duyệt cây theo tiền thứ tự (Gốc – Trái – Phải) như sau: +/*+23+41+*-3241/+↑22*32-↑43*32

Ký pháp nghịch đảo Ba Lan là kết quả duyệt cây theo hậu thứ tự (Trái – Phải – Gốc) như sau: 23+41+*32-4*1+/22↑32*+43↑32*-/+

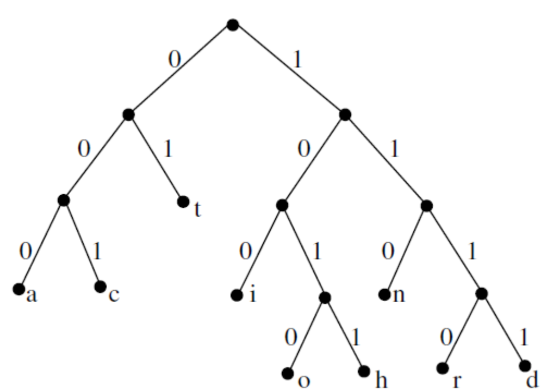
d. Tính giá trị của biểu thức: 5 3 + 12 4 + * 6 2 * +

5 3 + 12 4 + * 6 2 * +
= 8 16* 12 +
= 128 12 +
= 140. Vậy kết quả bằng 140.

e. Viết các biểu thức x y + 2 ↑x y – 2 ↑– x y */ theo kí pháp quen thuộc

x y + 2 ↑ x y – 2 ↑– x y */
= (x+y)2↑(x-y)2↑-xy/
= $(x+y)^2(x-y)^2$-xy/
= $(x+y)^2-(x-y)^2$xy/
= $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$

Bài 25. ***Cho cây nhị phân biểu diễn mã tiền tố như hình vẽ.***



a. Xác định mã của các chữ cái là nhãn các lá.

Chữ cái a: 000; c: 001; t: 01; i:100; o: 1010; h:1011; n: 110; r: 1110; d: 1111

b. Xác định mã của các từ: hoc; toan; tin; dothi.

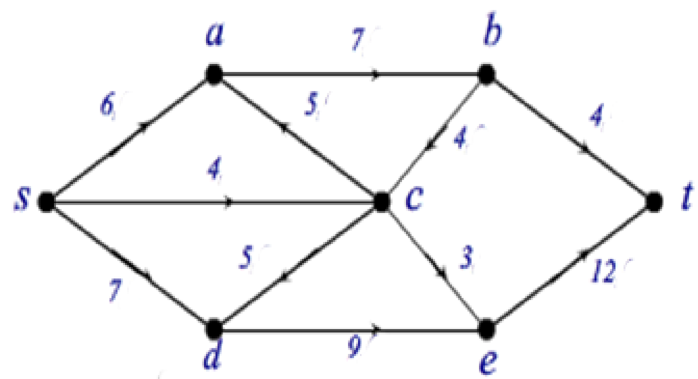
Mã của các từ: hoc: 1011 1010 001; toan: 01 1010 000 110 tin: 01 100 110; dothi: 1111 1010 01 1011 100

c. Xác định cừ ứng với mã: 01 1010 000 110 1110 1010 100 1110 000 001.

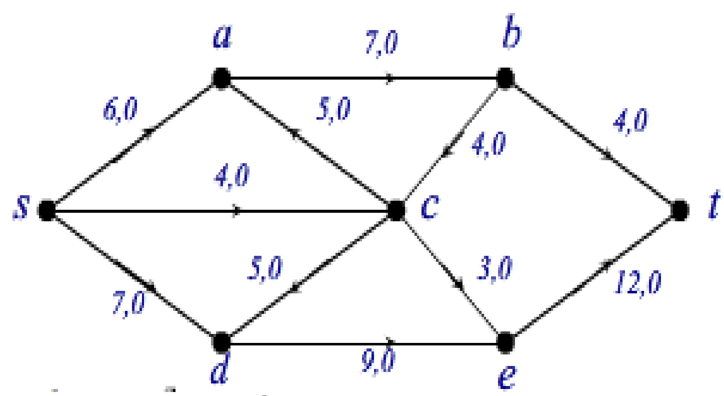
Mã này là: t o a n r o i r a c

Bài 26. ***Tìm luồng cực đại của mạng sau***

a.



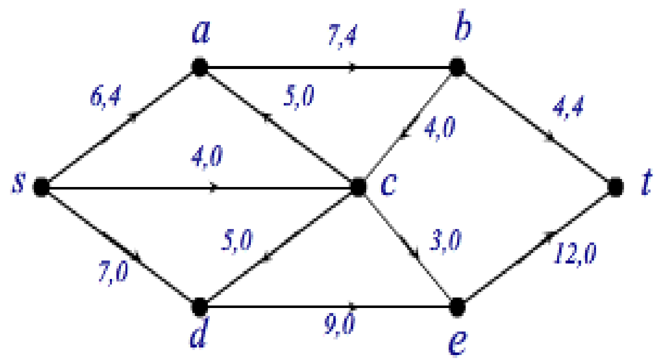
Khởi tạo luồng f(i,j) = 0; i,j ∈ {s, a, b, c, d, e, t}



- Bước lặp 1 : Đường tăng luồng s → a → b → t

$\Delta = \min(c_f(s, a), c_f(a, b), c_f(b, t)) =$
$\Delta = \min(c(s, a) - f(s, a), c(a, b) - f(a, b), c(b,t) - f(b,t)) =$
$\Delta = \min(6 - 0, 7 - 0, 4 - 0) = 4$

Vậy: f(s,a) = 4; f(a,b) = 4; f(b,t) = 4



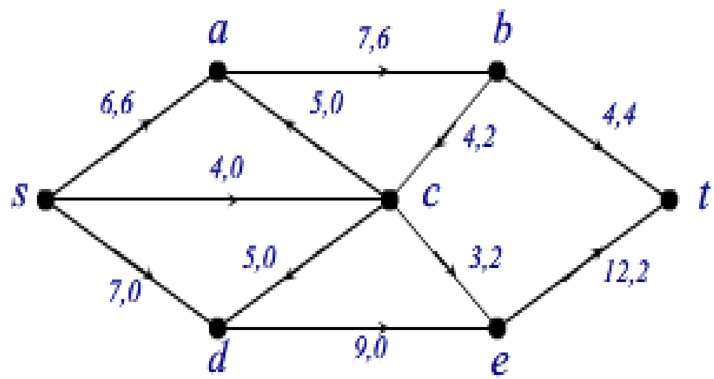
- Bước lặp 2: s → a → b → c → e → t

$\Delta = \min(c_f(s, a), c_f(a, b), c_f(b, c), c_f(c, e), c_f(e, t))$

$\Delta = \min(c(s, a) - f(s, a), c(a,b) - f(a,b), c(b,c) - f(b,c), c(c,e) - f(c,e), c(e,t) - f(e,t))$

$\Delta = \min(6 - 4, 7 - 4, 4 - 0, 3 - 0, 12 - 0) = 2$

Vậy: f(s,a) = 6; f(a,b) = 6; f(b,c) = 2; f(c,e) = 2; f(e,t) = 2



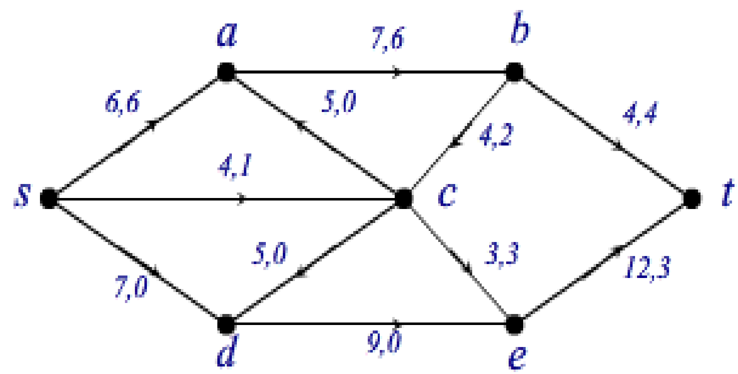
- Bước lặp 3 : s → c → e → t

$\Delta = \min(c_f(s, c), c_f(c, e), c_f(e, t))$

$\Delta = \min(c(s, c) - f(s,c), c(c,e) - f(c,e), c(e,t) - f(e,t))$

$\Delta = \min(4 - 0, 3 - 2, 12 - 0) = 1$

Vậy: f(s,c) = 1; f(c,e) = 3; f(e,t) = 3



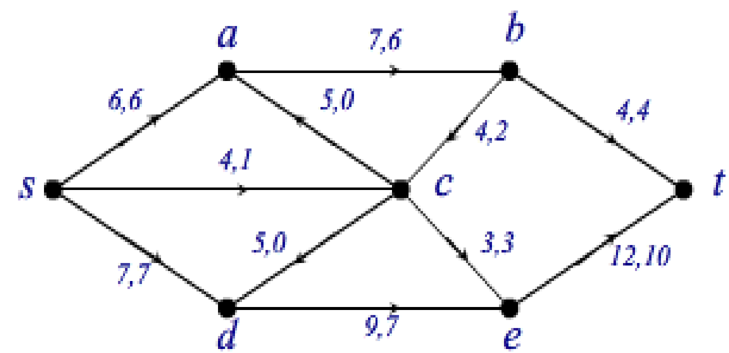
- Bước lặp 4 : s → d → e → t

  Δ = min(c_f(s, d), c_f(d, e), c_f(e, t))

  Δ = min(c(s, d) − f(s,d), c(d,e) − f(d,e), c(e,t) − f(e,t))

  Δ = min(7 - 0, 9 - 2, 12 - 3) = 7

  Vậy: f(s,d) = 7; f(d,e) = 7; f(e,t) = 10



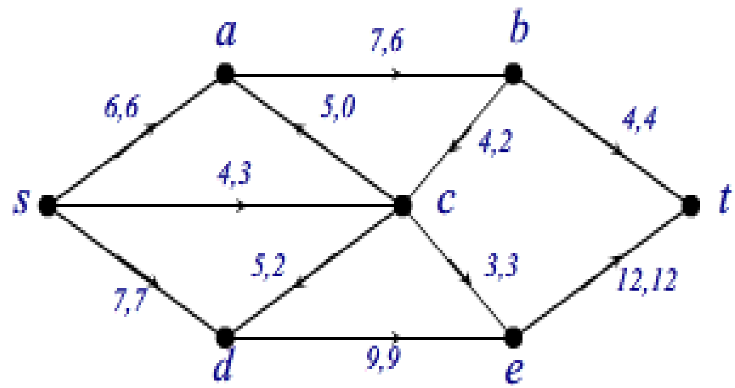
- Bước lặp 5 : s → c → d → e → t

  Δ = min(c_f(s, c), c_f(c,d), c_f(d, e), c_f(e, t))

  Δ = min(c(s, c) − f(s,c) , c(c,d) − f(c,d), c(d,e) − f(d,e), c(e,t) − f(e,t))

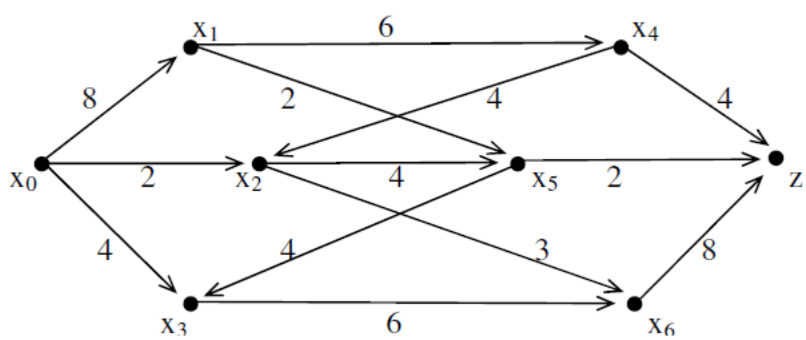
  Δ = min(4 - 1, 5 - 0, 9 - 7 , 12 - 10) = 2

  Vậy: f(s,c) = 3; f(c,d)=2; f(d,e) = 9; f(e,t) = 12



- Bước lặp 6: Không còn đường tăng luồng nữa, Val(fmax) = 6+3+7 = 16

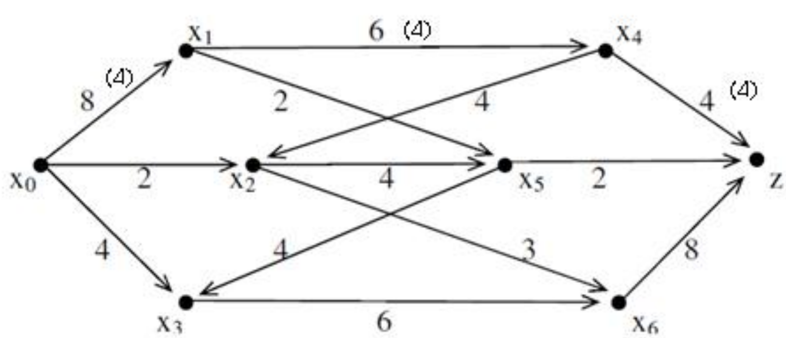
b.



Khởi tạo luồng f(i,j) = 0;

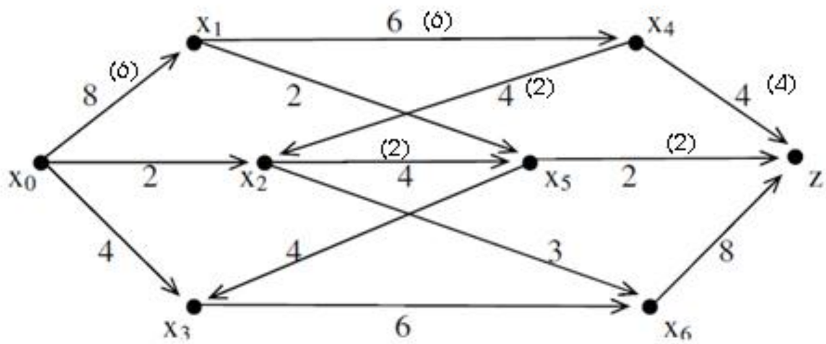
- Đường tăng luồng x0 → x1 → x4 → z : Δ = 4

  f(x0,x1) = 4;f(x1,x4) = 4;f(x4,z) = 4



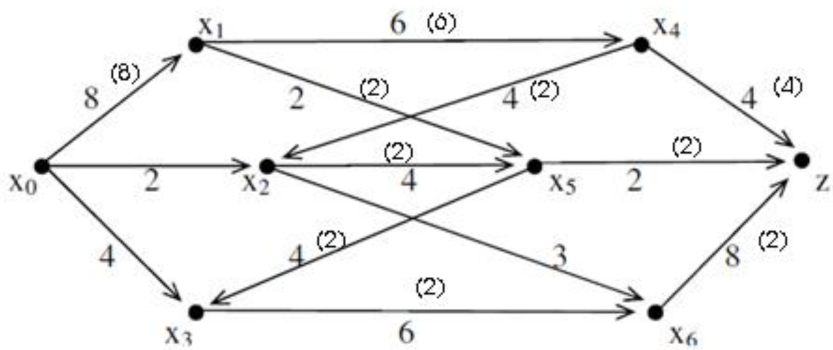
- Đường tăng luồng x0 → x1 → x4 → x2 → x5 → z : Δ = 2

  f(x0,x1) = 6;f(x1,x4) = 6;f(x4,x2) = 2; f(x2,x5) = 2; f(x5,z) = 2



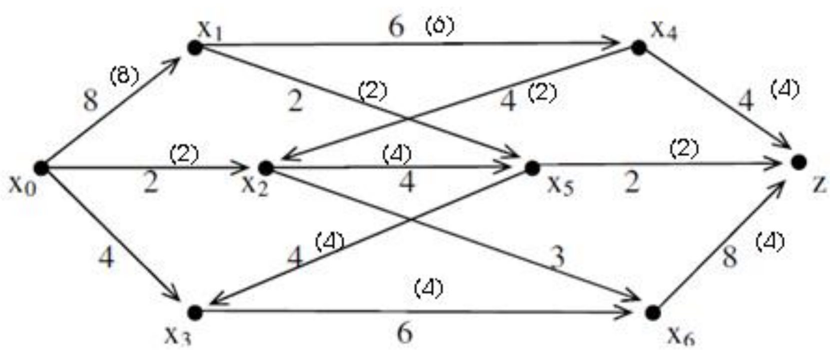
- Đường tăng luồng x0 → x1 → x5 → x3 → x6 → z : Δ = 2

  f(x0,x1) = 8;f(x1,x5) = 2;f(x5,x3) = 2; f(x3,x6) = 2; f(x5,z) = 2



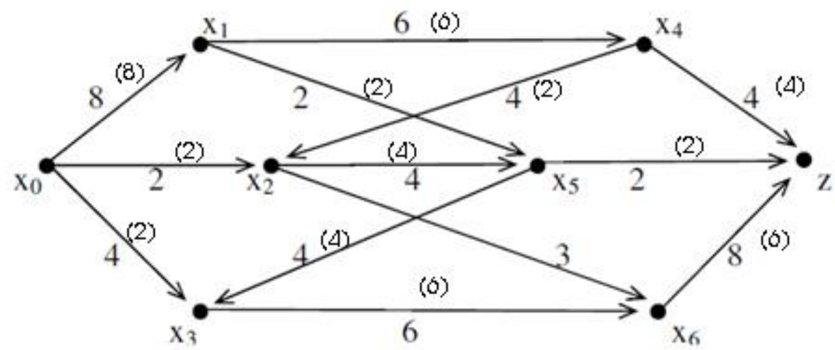
- Đường tăng luồng x0 → x2 → x5 → x3 → x6 → z : Δ = 2

  f(x0,x2) = 2;f(x2,x5) = 4;f(x5,x3) = 4; f(x3,x6) = 4; f(x5,z) = 4



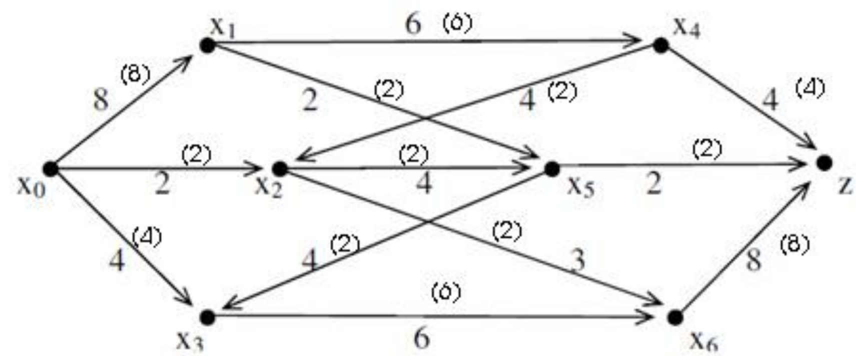
- Đường tăng luồng x0 → x3 → x6 → z : Δ = 2

  f(x0,x3) = 2;f(x3,x6) = 6;f(x6,z) = 6



- Đường tăng luồng x0 → x3 → x5 → x2 → x6 → z : Δ = 2

  f(x0,x3) = 4;f(x3,x5) = 2; f(x5,x2) = 2; f(x2,x6) = 2; f(x6,z) = 8



Không còn đường tăng luồng nữa, Val(fmax) = 8+2+4 = 14. Lát cắt cực tiểu A = {xo} : C(x0,x1) + C(x0,x2) + C(x0,x3) = 8+ 2 + 4 =14

Bài 27.

Bảng dưới đây cho khoảng cách tính theo km của 6 đài truyền hình (đánh số từ 1 đến 6). Hỏi phải cần bao nhiêu kênh khác nhau để phát sóng, biết rằng mỗi đài phủ sóng trong phạm vi bán kính 90 km. Hãy lập kế hoạch cụ thể để phân chia các kênh.

	1	2	3	4	5	6
1		85	75	100	50	100
2	85		125	65	100	120
3	75	125		100	90	150
4	100	65	100		45	65
5	50	100	90	45		55
6	100	120	150	65	55	

Ta phác họa đồ thị gồm 6 đỉnh, mỗi đỉnh ứng với một đài phát. Hai đài có khoảng cách từ 90 km trở xuống được nối với nhau bằng 1 cạnh. Ta tô màu cho đồ thị, các đỉnh cùng màu sẽ được phép phát cùng một kênh.

Như vậy, sau khi tô màu ta có 3 kênh: đài 1 và 4 phát cùng kênh 1 (màu vàng), đài 2 và đài 5 phát cùng kênh 2 (màu xanh lá cây), đài 6 và 3 phát cùng kênh 3 (màu đỏ).